ЛЕКЦИЯ № 3

Симплекс-метод, теория двойственности ЛП, необходимые условия экстремума

1. Двухфазный симплекс-метод или метод искусственного базиса

2. Теоремы двойственности ЛП. Теоремы Фаркаша – Минковского и Гордана

Двухфазный симплекс-метод

0.Построить симплекс-таблицу для задачи

$$\boldsymbol{\xi = \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \to min,} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{a_i x + x_{n+i} = b_i, i = \overline{1, m};} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{x_j \geq 0, j = \overline{1, n+m},} \tag{3}$$

выбрав в качестве базиса $\boldsymbol{B = (A_{n+i}, \ldots, A_{n+m})}$.

Двухфазный симплекс-метод

Здесь $\boldsymbol{a_i}$ — это $\boldsymbol{i}$-я строка матрицы $\boldsymbol{A(i=\overline{1,m})}$. Так как матрица $\boldsymbol{B}$ единичная, то для построения таблицы достаточно в целевой функции $\boldsymbol{\xi}$ выразить базисные переменные (искусственный базис) $\boldsymbol{x_{n+i}(i=\overline{1,m})}$ через небазисные переменные $\boldsymbol{x_j(j=\overline{1,n})}$, используя ограничения $\boldsymbol{(2)}$. В результате получим, что

$$\boldsymbol{\xi=\sum_{i=1}^{m}(b_i-a_ix).}$$

Двухфазный симплекс-метод

Следовательно,

$$z_{00} = -\sum_{i=1}^{m} b_i, z_{0j} = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}, j = \overline{1,n}.$$

При этом симплекс таблица прямо допустима, а базисное допустимое решение имеет вид $x_j = 0(j = \overline{1,n})$, и $x_n + i = b_i(i = \overline{1,m})$.

Двухфазный симплекс-метод

1. Проделать шаги 1-4 алгоритма симплекс-метода. Так как целевая функция задачи (1)-(3) ограничена снизу нулем и допустимое множество, задаваемое условиями (2)-(3) непусто, то задача (1)-(3) всегда разрешима и минимум неотрицателен. Поэтому на первом этапе вычисления могут завершиться только получением прямо и двойственно допустимого базиса. Как только такой базис будет получен, перейти к следующему пункту.

Двухфазный симплекс-метод

2. Если оптимальное решение $\boldsymbol{\xi}^* > \mathbf{0}$, то КОНЕЦ (исходная задача не имеет допустимых решений: $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\emptyset}$), иначе удалить из симплекс-таблицы все столбцы, соответствующие искусственным переменным $\boldsymbol{x_j(j = \overline{n+1, n+m}),}$ и нулевую строку.
3. Если базисными переменными являются только переменные исходной задачи $\boldsymbol{x_j(j \leq n),}$ то перейти на шаг 7.
4. Выбрать строку, соответствующую искусственной переменной $\boldsymbol{x_r(r > n)}$.

Двухфазный симплекс-метод

5. Если существует $\boldsymbol{z_{rs} \neq 0 (1 \leq s \leq n),}$ то выполнить элементарное преобразование базиса с ведущим элементом $\boldsymbol{z_{rs}}$ и перейти на шаг 3.

6. Если $\boldsymbol{z_{rj} = 0}$ для всех $\boldsymbol{j = \overline{1, n},}$ то удалить $\boldsymbol{r}$-ю строку из симплекс-таблицы и перейти на шаг 3.

7. Добавить нулевую строку в симплекс-таблицу, записав в нее коэффициенты целевой функции основной задачи $\boldsymbol{w(x)}$, выраженной через небазисные переменные. Получена прямо допустимая симплекс-таблица исходной задачи.

Двухфазный симплекс-метод

Шаги 0-7 описанного выше способа получения базисного допустимого решения обычно называют первым этапом симплекс-метода, а метод в целом — двухэтапным симплекс-методом.

Выполнение шага 6 свидетельствует о линейной зависимости уравнений $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, что позволяет удалить часть уравнений. Подобная ситуация возникает, если ранг матрицы $\boldsymbol{A}$ меньше числа уравнений $\boldsymbol{m}$.

ЛП: двойственная задача

Прямая задача		Двойственная задача
$\boldsymbol{w(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min}$		$\boldsymbol{z(y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max}$
$\boldsymbol{a_i x \geq b_i}$	$\boldsymbol{i \in I_1}$	$\boldsymbol{y_i \geq 0}$
$\boldsymbol{a_i x = b_i}$	$\boldsymbol{i \in I_2}$	$\boldsymbol{y_i -}$ своб.
$\boldsymbol{x_j \geq 0}$	$\boldsymbol{j \in J_1}$	$\boldsymbol{y A_j \leq c_j}$
$\boldsymbol{x_j -}$ своб.	$\boldsymbol{j \in J_2}$	$\boldsymbol{y A_j = c_j.}$

Первая теорема двойственности

Теорема (Первая теорема двойственности). Прямая и двойственная к ней задачи либо одновременно разрешимы, либо одновременно неразрешимы.

При этом в первом случае оптимальные значения целевых функций этих задач совпадают, а во втором случае по крайней мере одна из задач неразрешима в силу несовместности ее ограничений.

Вторая теорема двойственности

Теорема (Вторая теорема двойственности или теорема о дополняющей нежесткости). **Допустимые решения $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соответственно прямой и двойственной задачи оптимальны тогда и только тогда, когда выполняются условия:**

$$\boldsymbol{y_i(a_i x - b_i) = 0 \ (i \in I),}$$

$$\boldsymbol{(c_j - yA_j)x_j = 0 \ (j \in J).}$$

Теорема (теорема Фаркаша–Минковского). **Система уравнений $\boldsymbol{Ax = b, x \geq 0}$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $\boldsymbol{(b, y) \leq 0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA \leq 0}$.**

Доказательство. Необходимость. Пусть $\boldsymbol{\exists x}$ $\boldsymbol{Ax = b, x \geq 0}$ и пусть $\boldsymbol{y}$ — произвольное решение системы $\boldsymbol{yA \leq 0}$. Тогда

$$\boldsymbol{(b, y) = (Ax, y) = (x, yA) \leq (x, 0) = 0.}$$

Следствие. Система уравнений $\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$ разрешима в том и только в том случае когда неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \ge 0$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \ge \mathbf{0}$.

$\boldsymbol{Ax} \le \boldsymbol{b}$ разрешима $\iff$ разрешима система $\boldsymbol{Ax_1} - \boldsymbol{Ax_2} + \boldsymbol{Eu} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{u} \ge \mathbf{0} \iff$ когда неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \le \mathbf{0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA} \le \mathbf{0}, -\boldsymbol{yA} \le \mathbf{0}, \boldsymbol{Ey} \le \mathbf{0} \iff$ неравенство $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \ge \mathbf{0}$ выполняется для всех решений системы уравнений $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \ge \mathbf{0}$. ■

Следствие (теорема Гордана). Имеет место одно и только одно из следующих двух условий:

1. Разрешима система уравнений $\boldsymbol{Ax} < \mathbf{0}$;

2. существует такой $\neq \mathbf{0}$ вектор $\boldsymbol{y}$, что $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$.

Действительно, система уравнений $\boldsymbol{Ax} < \mathbf{0}$ разрешима $\iff$ разрешима система уравнений $\boldsymbol{Ax} \leq (\mathbf{-1}, \mathbf{-1}, \dots, \mathbf{-1})^\top$. По теореме Ф.–М. разрешимость последней системы эквивалентна выполнению условия:

если вектор $\boldsymbol{y}$ решение системы $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$, то выполняется неравенство $-\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$. Т.е. не существует ненулевого вектора $\boldsymbol{y}$ такого, что $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$.

Теперь пусть существует ненулевой вектор $\boldsymbol{y}$ такой, что $\boldsymbol{yA} = \mathbf{0}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$. Но тогда не выполняется неравенство $-\boldsymbol{y} \geq \mathbf{0} \Longrightarrow$ не выполнено условие теоремы Ф.–М. $\Longrightarrow$ система $\boldsymbol{Ax} \leq (\mathbf{-1, -1, \ldots, -1})^\top$ неразрешима $\Longrightarrow$ неразрешима система

$\boldsymbol{Ax} < \mathbf{0}$.$\blacksquare$