ЛЕКЦИЯ № 2

1. Задача линейного программирования

2. Критерий разрешимости

3. Симплекс-метод

Линейное программирование (ЛП)

Задача линейного программирования (ЛП) в канонической форме:

$$w(x) = (c, x) \longrightarrow \min \tag{5}$$

$$Ax = b, \tag{6}$$

$$x \geq 0, \tag{7}$$

где $c = (c_j), x = (x_j) \in R^n$, $A = (a_{ij}) - (m \times n)$ матрица, $b = (b_i) \in R^m$, $m \leq n$, $rang(A) = m$.

$$Ax = b \equiv (a_i, x) = b_i, i = \overline{1, m},$$

$$Ax = b \equiv \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b$$

ЛП: понятие базисного допустимого решения (б.д.р.).

Базис — любой набор $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(m)}$ из $\boldsymbol{m}$ линейно независимых столбцов матрицы системы ограничений $\boldsymbol{A}$.

Матрица $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(m)}]$ называется базисной.

Обозначения:

$$\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{\sigma}(1), \ldots, \boldsymbol{\sigma}(m)\}, \boldsymbol{S}' = \{1, \ldots, \boldsymbol{n}\} \setminus \boldsymbol{S}, \boldsymbol{A} = [\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}],$$

где $\boldsymbol{N} = [\boldsymbol{A}_j]_{j \in S'}$, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N)$, $\boldsymbol{x}_B = (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\sigma}(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\sigma}(m)})$ — базисные, а $\boldsymbol{x}_N = (\boldsymbol{x}_j)_{j \in S'}$ — небазисные переменные.

$$\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \qquad (6')$$

Определение 3. **Решение $(\boldsymbol{x}_B, \boldsymbol{x}_N) = (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, 0)$ системы уравнений (6) назовем базисным (соответствующим базису $\boldsymbol{B}$).**

ЛП: понятие б.д.р.

Лемма 3. **Вектор $\boldsymbol{x}$ — базисное решение системы (6) тогда и только тогда, когда множество столбцов с индексами из множества $\boldsymbol{S(x) = \{j|x_j \neq 0\}}$ — линейно независимо.**

Определение 4. **Базисным допустимым решением (б.д.р.)** называется любой элемент множества $\boldsymbol{Q}$, являющийся базисным решением системы уравнений $\mathbf{(6)}$.

Замечание 2. Решение соответствующее базису $\boldsymbol{B}$ — б.д.р. $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{B^{-1}b \geq 0}$.

ЛП: понятие б.д.р.

Определение 5. Вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}$ — **крайняя точка или вершина** множества $\boldsymbol{Q}$, если не существует допустимых решений $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^2$ из $\boldsymbol{Q}$ таких, что $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{x}^1 + (1 - \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{x}^2$, где $\mathbf{0} < \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{1}$.

Теорема 3. **Вектор $\boldsymbol{x}$ — б.д.р. тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x}$ — крайняя точка множества $\boldsymbol{Q}$.**

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}$ — крайняя точка, но не б.д.р. Из леммы 3 $\Longrightarrow$

$$\exists\, \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0} : \; \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \mathbf{0}. \qquad (*)$$

ЛП: понятие б.д.р.

При этом можем считать, что $(x_j = 0 \Longrightarrow y_j = 0) \Longrightarrow$

$$\{j | y_j \neq 0\} \subseteq \{j | x_j > 0\}. \qquad (**)$$

Т.к. $x \in Q$, то из $(*) \Longrightarrow$

$$\forall\, t \in R : z(t) = x + t\, y \text{ — решение } (6),$$

тогда из $(**) \Longrightarrow$

$$\forall \text{ малого } t \in R : \; z(t) \in Q.$$

$\Longrightarrow$

$$\exists\, \varepsilon > 0 : \; x^1 = x + \varepsilon y \in Q, x^2 = x - \varepsilon y \in Q,$$

$\Longrightarrow$

$$x^1 \neq x^2 \text{ и } x = \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow\rightarrow\leftarrow\Rightarrow x \text{ — б.д.р.}.$$

ЛП: понятие б.д.р.

Пусть $\boldsymbol{x}$ — б.д.р., но

$$\exists\, \mathbf{0} < \boldsymbol{\alpha} < \mathbf{1}, \exists\, \boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x}^2, \boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in \boldsymbol{Q} : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha x}^1 + (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{x}^2.$$

По условию $\boldsymbol{Ax}^1 = \boldsymbol{Ax}^2 (= \boldsymbol{b}) \Longrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2) = \mathbf{0}$, но

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^1 - \boldsymbol{x}^2) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \{\boldsymbol{A}_j | \boldsymbol{x}_j^1 \neq \boldsymbol{x}_j^2\}$ — линейно зависимо $\Rightarrow$

$\{\boldsymbol{A}_j | \boldsymbol{\alpha x}_j^1 + (\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{x}_j^2 > \mathbf{0}\}$ — линейно зависимо $\Rightarrow$

$\{\boldsymbol{A}_j | \boldsymbol{x}_j > \mathbf{0}\}$ — линейно зависимо $\Rightarrow \rightarrow\leftarrow$,

т.е. если x — б.д.р., то $\boldsymbol{x}$ — крайняя точка множества Q. ■

ЛП: Критерий разрешимости

Теорема 4 (Критерий разрешимости). Задача линейного программирования (5)-(7) разрешима тогда и только тогда, когда множество допустимых решений не пусто и целевая функция ограничена на нем.

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности покажем, что

$$\forall\, \boldsymbol{x}^0 \in \boldsymbol{Q}\ \exists\ \text{б.д.р. } \overline{\boldsymbol{x}} : \boldsymbol{w}(\overline{\boldsymbol{x}}) \leq \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^0).$$

Пусть

$$\overline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{Q}^0 = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q} | \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^0)\} \neq \emptyset$$

и имеет минимальное число ненулевых компонент $(\boldsymbol{supp}(\overline{\boldsymbol{x}}))$.

Докажем, что $\overline{\boldsymbol{x}}$ — б.д.р. Допустим противное. $\Longrightarrow$

ЛП: Критерий разрешимости

множество

$$\{A_j | \overline{x}_j > 0\} \text{ линейно зависимо } \implies$$

$$\exists\; y \neq 0 : Ay = 0 \text{ и если } \overline{x}_j = 0, \text{ то } y_j = 0.$$

Пусть $w(y) \leq 0$ (если необходимо, то возьмем $-y$). Положим $x(t) = \overline{x} + ty$. Выполняется следующее свойство

$$\forall \text{ малого } t \in R: \; x(t) \in Q.$$

1). Пусть $\forall j : y_j \geq 0 \Rightarrow \forall t \geq 0 \; x(t) \geq 0 \Rightarrow \forall t \geq 0 \; x(t) \in Q$

отсюда и неравенства $w(x(t)) = w(\overline{x}) + tw(y) \geq const$(по условию)

учитывая, что $w(y) \leq 0$ и $t \geq 0$ — произвольно,

имеем: $w(y) = 0$ и, следовательно, $w(x(t)) = w(\overline{x}) \; \forall t.$

ЛП: Критерий разрешимости

Т.к. из условия $y_j > 0 \Rightarrow \overline{x}_j > 0$, то

$$\forall \text{ малого по абсолютной величине } t < 0: \; x(t) \in Q.$$

Найдем такое $\bar{t}$ наибольшее по абсолютной величине из условия:

$$\forall j (y_j > 0 \Rightarrow \overline{x}_j + \bar{t} y_j \geq 0)$$

которое эквивалентно условию:

$$\forall j (y_j > 0 \Rightarrow \overline{x}_j \geq (-\bar{t}) y_j) \iff$$

$$(-\bar{t}) = \min_{y_j > 0} \frac{\overline{x}_j}{y_j} \iff \bar{t} = -\min_{y_j > 0} \frac{\overline{x}_j}{y_j}.$$

Итак $x(\bar{t}) \in Q$ и $w(x(\bar{t})) = w(\overline{x}) \leq w(x^0) \Rightarrow x(\bar{t}) \in Q^0$.

Получили противоречие. Т.к. $supp(x(\bar{t})) = supp(\overline{x}) - 1$.

ЛП: Критерий разрешимости

2). Пусть $\exists \boldsymbol{j} : \boldsymbol{y_j} < \mathbf{0}$. Тогда

$$\forall \text{ достаточно малых } \boldsymbol{t} \geq \mathbf{0} : \ \boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}) \in \boldsymbol{Q}.$$

Найдем наибольшее такое $\bar{\boldsymbol{t}}$ из условия:

$$\forall \boldsymbol{j}(\boldsymbol{y_j} < \mathbf{0} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}} + \bar{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{y_j} \geq \mathbf{0})$$

которое эквивалентно условию:

$$\forall \boldsymbol{j}(\boldsymbol{y_j} < \mathbf{0} \Rightarrow \overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}} \geq \bar{\boldsymbol{t}}(-\boldsymbol{y_j})) \iff$$

$$\iff \bar{\boldsymbol{t}} = \min_{\boldsymbol{y_j} < 0} \frac{\overline{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}}}{-\boldsymbol{y_j}}.$$

Итак $\boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{t}}) \in \boldsymbol{Q}$ и т.к. $\bar{\boldsymbol{t}} > \mathbf{0}, \boldsymbol{d} \leq \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{t}})) = \boldsymbol{w}(\overline{\boldsymbol{x}}) + \boldsymbol{d}\bar{\boldsymbol{t}} \leq$ $\leq \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}) \Rightarrow \boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{t}}) \in \boldsymbol{Q}^{\mathbf{0}}$.

Получили противоречие. Т.к. $\boldsymbol{supp}(\boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{t}})) = \boldsymbol{supp}(\overline{\boldsymbol{x}}) - \mathbf{1}$.

ЛП: Критерий разрешимости

Т.к. по условию $\boldsymbol{Q} \neq \varnothing$, то множество базисных допустимых решений задачи не пусто. Т.к. оно конечно, то

$$\exists\ \boldsymbol{x}^* - \text{б.д.р.}: \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}^*) \leq \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x})\ \forall\ \text{б.д.р. } \boldsymbol{x}.$$

Из ранее доказанного следует, что $\boldsymbol{x}^*$ — оптимальное решение. ■

Следствие 3. Если множество допустимых решений задачи ЛП не пусто, то существуют базисные допустимые решения.

Следует из доказательства теоремы 4 (взять $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{0}$).

Следствие 4. Если задача ЛП разрешима, то существует оптимальное базисное решение.

Симплекс-таблица (с.-т.)

$\boldsymbol{x}$ – допустимое решение задачи (5–7) со значением целевой функции $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w} \Leftrightarrow$ пара $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x})$ – решение системы уравнений $(\mathbf{5}')$, $(\mathbf{6}')$, $(\mathbf{7})$ или системы

$$-\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N}) \boldsymbol{x}_N = -\boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b}, \qquad (\mathbf{5}')$$

$$\boldsymbol{E} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N} \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b}, \qquad (\mathbf{6}')$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$-w + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j = z_{00}, \qquad (5'')$$

$$x_{\sigma(i)} + \sum_{j \in S'} z_{ij} x_j = z_{i0}, \; i = \overline{1, m}, \qquad (6'')$$

где

$$z_{00} = -c_B B^{-1} b = -w(\overline{x}),$$

$$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j, \; j = 1, \ldots, n,$$

$$(z_{10}, \ldots, z_{m0})^\top = B^{-1} b,$$

$$(z_{1j}, \ldots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

		x_1	$\dots$	x_j	$\dots$	x_n
$-w$	z_{00}	z_{01}	$\dots$	z_{0j}	$\dots$	z_{0n}
$x_{\sigma(1)}$	z_{10}	z_{11}	$\dots$	z_{1j}	$\dots$	z_{1n}
.	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_{\sigma(i)}$	z_{i0}	z_{i1}	$\dots$	z_{ij}	$\dots$	z_{in}
.	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$x_{\sigma(m)}$	z_{m0}	z_{m1}	$\dots$	z_{mj}	$\dots$	z_{mn}

Симплекс-таблица (с.-т.)

		x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_n
$-w$	z_{00}	0	$\dots$	0	$\dots$	0	z_{0m+1}	$\dots$	z_{0n}
x_1	z_{10}	1	$\dots$	0	$\dots$	0	z_{1m+1}	$\dots$	z_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_i	z_{i0}	0	$\dots$	1	$\dots$	0	z_{im+1}	$\dots$	z_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	z_{m0}	0	$\dots$	0	$\dots$	1	z_{mm+1}	$\dots$	z_{mn}

Симплекс-таблица (с.-т.)

Определение 6. Симплекс–таблица прямо допустима, если $\boldsymbol{z_{i0} \geq 0,\ i = 1, \ldots, m.}$

Базис $\boldsymbol{B}$, соответствующий ей, также называется прямо допустимым.

Определение 7. Симплекс–таблица двойственно допустима, если $\boldsymbol{z_{0j} \geq 0,\ j = 1, \ldots, n.}$

Базис $\boldsymbol{B}$, соответствующий этой таблице, также называется двойственно допустимым.

Элементарное преобразование б.д.р.

$x(t), t \geq 0:$

$$\begin{aligned} x_{\sigma(i)}(t) &= \overline{x}_{\sigma(i)} - z_{is}t, \\ x_s(t) &= t, \\ x_j(t) &= 0, j \in S' \backslash s \end{aligned} \tag{10}$$

$$\bar{t} = \frac{\overline{x}_{\sigma(r)}}{z_{rs}} = \frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min_{z_{is}>0,\ i\geq 1} \frac{z_{i0}}{z_{is}}.$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$\alpha_i' = (z_{i0}', z_{i1}', \ldots, z_{in}')$ $(i = \overline{0, m})$ строки новой симплекс– таблицы:

$$\begin{cases} \alpha_i' = \alpha_i - \dfrac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_r, \ i \neq r, \\ \alpha_r' = \dfrac{1}{z_{rs}}\alpha_r. \end{cases} \qquad (11)$$

r-я строка, s-й столбец и элемент z_{rs} называются ведущими.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Соотношения (11) эквивалентны следующим

$$\begin{cases} z'_{ij} = z_{ij} - \dfrac{z_{is} z_{rj}}{z_{rs}}, \ i \neq r, \\ z'_{rj} = \dfrac{z_{rj}}{z_{rs}}. \end{cases}$$

Замечание 3. Элементарные преобразования сохраняют прямо допустимость с.-т.

Симплекс-метод

0) Построить симплекс–таблицу, соответствующую заданному базисному допустимому решению (таблица, естественно, будет прямо допустимой, т.е. $\boldsymbol{z_{i0} \geq 0, i = \overline{1, m}}$).

1) Если симплекс–таблица двойственно допустима, т.е. $\boldsymbol{z_{0j} \geq 0,\ j = \overline{1, n}}$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение)

2) Иначе, выбрать ведущий столбец $\boldsymbol{s : z_{0s} < 0,\ s \geq 1}$.

Симплекс-метод

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min\{\, \frac{z_{i0}}{z_{is}} \ \mid \ z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции).

4) Преобразовать симплекс–таблицу, положить $\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Лексикографический с. - м.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}'' \in \boldsymbol{R}^{n+1}$.

Вектор $\boldsymbol{\alpha}'$ лексикографически больше вектора $\boldsymbol{\alpha}''$ $(\boldsymbol{\alpha}' \succ \boldsymbol{\alpha}'') \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}' - \boldsymbol{\alpha}'' \succ \mathbf{0}$.

Симплекс-таблица *нормальна*, если каждая ее строка $\boldsymbol{\alpha}_i$, $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{m}$ лексикографически больше нуля.

Лексикографический с. - м.

0) Начать с нормальной симплекс–таблицы.

3) Если $\{i \mid z_{is} < 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{1}{z_{rs}}\alpha_r = lex\min\{\frac{1}{z_{is}}\alpha_i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

Сохранение нормальности с.-т. на шаге 4:

1. $\boldsymbol{\alpha_r \succ 0}$, $\boldsymbol{z_{rs} > 0 \Rightarrow \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r \succ 0}$
2. $\boldsymbol{z_{is} \leq 0 \Rightarrow \alpha_i - \frac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_i \succeq \alpha_i \succ 0}$
3. $\boldsymbol{z_{rs} > 0 \Rightarrow z_{is}[\frac{1}{z_{is}}\alpha_i - \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r] \succ 0}$.

Лекскографическое возрастание 0-й строки:

$\boldsymbol{z_{0s} < 0}$, $\boldsymbol{z_{rs} > 0}$ и $\boldsymbol{\alpha_r \succ 0}$, то

$$\boldsymbol{\alpha_0 - \frac{z_{0s}}{z_{rs}}\alpha_r \succ \alpha_0.}$$

Итак базисы не могут повторятся, следовательно, метод конечен.