ЛЕКЦИЯ № 4

Первый (или циклический) алгоритм Гомори

1. Лексикографический двойственный симплекс-метод

2. Понятие отсечения

3. Описание алгоритма

4. Конечность метода

Лексикографический двойственный с. - м.

Лемма. Пусть $\boldsymbol{B}$ – базисная матрица, $\overline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{B})$ – решение системы уравнений

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{N}} = \boldsymbol{0},$$

а $\overline{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{B})$, соответственно, системы уравнений

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}.$$

Тогда

$$(\boldsymbol{c}, \overline{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{B})) = (\boldsymbol{b}, \overline{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{B})).$$

Лексикографический двойственный с. - м.

Пусть $\boldsymbol{B}$ — двойственно допустимый базис, $\boldsymbol{S}' = \{\boldsymbol{\tau}(1), \ldots, \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{l})\}$, $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{n} - \boldsymbol{m}$, — множество номеров небазисных переменных, а $\boldsymbol{S}$ — базисных переменных. Перепишем соотношения :

$$\boldsymbol{x_i = z_{i0} + \sum_{j \in S'} z_{ij}(-x_j), \; i \in S \cup \{0\}.} \quad (1)$$

Лексикографический двойственный с. - м.

Добавим к системе уравнений (1) тождественные соотношения $\boldsymbol{x_i = x_i}$ для небазисных переменных

$$\boldsymbol{x_i = (-1)(-x_i), i \in S'.} \qquad \textbf{(2)}$$

Симплекс-таблица будет состоять из коэффициентов правых частей соотношений (1), (2).

Лексикографический двойственный с. - м.

$$
\begin{array}{c|c|ccc|}
 & 1 & -x_{m+1} & \ldots & -x_n \\
\hline
x_0 & z_{00} & z_{01} & \ldots & z_{0l} \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\
x_i & z_{i0} & z_{i1} & \ldots & z_{il} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\
x_{m+1} & 0 & -1 & \ldots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\
x_n & 0 & 0 & \ldots & -1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\beta_j = (z_{0j}, z_{1j}, \ldots, z_{nj})^\top, j = \overline{0, 1, \ldots, l}.$$

Лексикографический двойственный с. - м.

Тогда система (1), (2) эквивалентна векторному уравнению:

$$(\boldsymbol{x_0, x_1, \ldots, x_n})^\top = \boldsymbol{\beta_0} + \sum_{\boldsymbol{j \in S'}} \boldsymbol{\beta_j(-x_j)}. \tag{3}$$

Если $\boldsymbol{z_{rs}} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{s} \geq \mathbf{1}$, то возможно элементарное преобразование базиса

$$\boldsymbol{x_r} \longrightarrow \boldsymbol{x_{\tau(s)}}$$

Лексикографический двойственный с. - м.

выразим переменную $\boldsymbol{x_{\tau(s)}}$ из $\boldsymbol{r}$-го уравнения системы (1)

$$\boldsymbol{x_{\tau(s)} = \frac{1}{z_{rs}}(z_{r0} + \sum_{j\neq s} z_{rj}(-x_{\tau(j)}) - x_r)}$$

и заменим ее в правой части (3):

$$\boldsymbol{(x_0, x_1, \ldots, x_n)^\top = (\beta_0 - \frac{z_{r0}}{z_{rs}}\beta_s) +}$$

$$\boldsymbol{+ \sum_{j\neq s}(\beta_j - \frac{z_{rj}}{z_{rs}}\beta_s)(-x_{\tau(j)}) + \left(\frac{-1}{z_{rs}}\right)(-x_r).}$$

Лексикографический двойственный с. - м.

Итак элементарное преобразование базиса:

$$x_r \longrightarrow x_{\tau(s)}$$

приводит к с.-т. со столбцами:

$$\begin{cases} \beta'_j = \beta_j - \dfrac{z_{rj}}{z_{rs}}\beta_s, \; j \neq s, \\ \beta'_s = \left(\dfrac{-1}{z_{rs}}\right)\beta_s. \end{cases} \tag{4}$$

Лексикографический двойственный с. - м.

Пусть $\boldsymbol{\beta}', \boldsymbol{\beta}'' \in \boldsymbol{R}^{n+1}$. Вектор $\boldsymbol{\beta}'$ лексикографически больше вектора $\boldsymbol{\beta}''$, $\boldsymbol{\beta}' \succ \boldsymbol{\beta}''$, если $\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\beta}'' \succ \mathbf{0}$.

Симплекс-таблицу будем называть *нормальной*, если каждый ее столбец $\boldsymbol{\beta}_j$, $\boldsymbol{j} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{l}$ лексикографически больше нуля.

Лексикографический двойственный с. - м.

0) Начать с нормальной симплекс–таблицы.

1) Если симплекс–таблица прямо допустима, т.е. $\boldsymbol{z_{i0} \geq 0,\ i = \overline{1, n}}$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение)

2) Иначе, выбрать ведущую строку $\boldsymbol{r : z_{r0} < 0,\ r \geq 1}$.

Лексикографический двойственный с. - м.

3) Если $\{j \mid z_{rj} < 0,\ j \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущий столбец s по правилу:

$$\frac{1}{|z_{rs}|}\beta_s = lex\min\{\frac{1}{|z_{rj}|}\beta_j \mid z_{rj} < 0,\ j \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

4) Преобразовать симплекс–таблицу, положить $\tau(s) := r$ и перейти на шаг 1.

Лексикографический двойственный с. - м.

1. Преобразование (4) симплекс-таблицы на шаге 4 сохраняет ее нормальность.

2. Т.к. $\boldsymbol{z_{r0}} < \mathbf{0}$, $\boldsymbol{z_{rs}} < \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\beta_s} \succ \mathbf{0}$, то

$$\boldsymbol{\beta_0} - \frac{\boldsymbol{z_{r0}}}{\boldsymbol{z_{rs}}}\boldsymbol{\beta_s} \prec \boldsymbol{\beta_0}.$$

Итак базисы не могут повторятся, следовательно, метод конечен.

Целочисленное линейное программирование (ЦЛП)

Задача ЦЛП (IP):

$$\boldsymbol{cx \to \max}$$

$$\boldsymbol{Ax = b}$$

$$\boldsymbol{x \geq 0}$$

$$\boldsymbol{x_j} \text{ — целое, } \boldsymbol{j = 1, \ldots, n.}$$

ЛП-релаксация задачи (IP) – задача ЛП.

ЦЛП – методы отсечения

Пусть $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ – оптимальное решение ЛП-релаксации задачи (IP). Если $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} \in \boldsymbol{Z}^{\boldsymbol{n}}$, то $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ – оптимальное решение задачи (IP).

Иначе добавить к ЛП-релаксации новое ограничение (*отсечение*):

– $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ этому ограничению не удовлетворяет (отсекается);

ЦЛП – методы отсечения

– все допустимые решения задачи ЦЛП остаются допустимыми решениями новой задачи ЛП.

Решаем новую задачу ЛП и повторяем указанные шаги до получения решения задачи ЦЛП, либо обнаружения ее неразрешимости.

ЦЛП – методы отсечения

$\lfloor h \rfloor$ — наибольшее целое, не превосходящее h.

Пусть функция $z_0 - \sum_j z_j x_j$ принимает целые значения на множестве Q_{IP}. Рассмотрим уравнение

$$z = z_0 - \sum_j z_j x_j. \tag{5}$$

Для $x \in Q_{IP}$ имеем

$$z + \sum_j \lfloor z_j \rfloor x_j \leq z_0$$

ЦЛП – методы отсечения

в силу целочисленности $\boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{x_j}$ имеем

$$\boldsymbol{z + \sum_j \lfloor z_j \rfloor x_j \le \lfloor z_0 \rfloor.}$$

Из (5) получим

$$\boldsymbol{z_0 - \sum_j z_j x_j + \sum_j \lfloor z_j \rfloor x_j \le \lfloor z_0 \rfloor.}$$

Преобразуем

ЦЛП – методы отсечения

$$\sum_j (\lfloor z_j \rfloor - z_j) x_j \le \lfloor z_0 \rfloor - z_0$$

или

$$\sum_j (-\{z_j\}) x_j \le -\{z_0\}$$

Если к задаче (IP) добавить ограничения:

$$u = -\{z_0\} - \sum_j (-\{z_j\}) x_j,$$

$$u \ge 0,$$

то получим эквивалентную задачу

Первый алгоритм Гомори

Описание первого алгоритма Гомори

0) Начать с нормальной симплекс-таблицы (двойственно допустимой). Положить $\boldsymbol{\nu := 0.}$

1) Если симплекс-таблица прямо допустима и все элементы $\boldsymbol{z_{i0}, \; i = 1, \ldots, n,}$ целые, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение задачи.

2) Если симплекс-таблица прямо допустима, то выбрать минимальное $\boldsymbol{p \geq 1,}$ такое, что $\boldsymbol{z_{p0}}$ — нецелое,

Первый алгоритм Гомори

положить $\nu := \nu + 1$.

Строку с номером p назовем *производящей*. Этой строке соответствует уравнение

$$x_p = z_{p0} - \sum_{j=1}^{l} z_{pj} x_{\tau(j)},$$

по которому строится дополнительное ограничение (роль z играет x_p, роль z_0 играет z_{p0}, а роль z_j соответственно z_{pj}):

Первый алгоритм Гомори

$$x_{n+\nu} = -f_{p0} - \sum_{j=1}^{l} (-f_{pj}) x_{\tau(j)} \geq 0,$$

где f_{pj} — дробная часть числа z_{pj} $(z_{pj} = \lfloor z_{pj} \rfloor + f_{pj},\ 0 \leq f_{pj} < 1)$.

К симплекс-таблице добавляется $(n+1)$ строка (отсечение Гомори), соответствующая дополнительному ограничению (с базисной переменной $x_{n+\nu}$).

Первый алгоритм Гомори

3) Выбрать ведущую строку $r: \ z_{r0} < 0, \ r \geq 1.$

4) Если $\{j \mid z_{pj} < 0, \ j \geq 1\} \neq \emptyset,$ то выбрать ведущий столбец $s:$

$$\frac{1}{|z_{rs}|}\beta_s = lexmin\{\frac{1}{|z_{rj}|}\beta_j \mid z_{rj} < 0, j \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (текущая задача ЛП, а следовательно, и исходная задача ЦЛП, неразрешима ввиду несовместности ее ограничений).

Первый алгоритм Гомори

5) Преобразовать симплекс-таблицу;

положить $\boldsymbol{\tau(s) := n + \nu}$ и отбросить $\boldsymbol{(n+1)}$-ю строку, если таковая имелась,

иначе $\boldsymbol{\tau(s) := r}$;

перейти на шаг 1.

Первый алгоритм Гомори

Пусть $\boldsymbol{x^0 = (z_{10}, \ldots, z_{n0})^T}$ – б.д. р.(задачи ЛП), соответствующее текущей с.-т. в момент введения отсечения Гомори, (является оптимальным решением ЛП-релаксации).

Т.к. $\boldsymbol{z_{p0}}$ — нецелое, то $\boldsymbol{f_{p0} > 0}$, следовательно,

$$\boldsymbol{x_{n+\nu}(x^0) = -f_{p0} < 0.}$$

Итак $\boldsymbol{x^0}$ отсекается.

Первый алгоритм Гомори

Пусть

$$\boldsymbol{x_{n+\nu} = -f_{p0} - \sum_{j=1}^{l} (-f_{pj}) x_{\tau(j)} \geq 0,}$$

отсечение Гомори (шаг 2). Т.к. $\boldsymbol{-f_{p0} < 0}$, то $\boldsymbol{x_{n+\nu}}$ – единственная отрицательная базисная переменная. Следовательно, с.-т. двойственно допустима, но не прямо допустима.

Первый алгоритм Гомори

Итак, на шаге 3 в качестве ведущей будет выбрана $n+1$ строка (единственность).

При элементарном преобразовании с.-т. переменная $x_{n+\nu}$ станет небазисной.

Ведущая строка превращается в тождество

$$x_{n+\nu} = (-1)(-x_{n+\nu})$$

и на шаге 5 удаляется из с.-т.

Конечность первого алгоритма Гомори

1) Пусть известна некоторая (условная) нижняя граница M для оптимального значения целевой функции x_0.

2) Пусть функция x_0 целочисленна на множестве допустимых решений задачи ЦЛП. (Тогда нулевая строка с.-т. может (и будет) использоваться в качестве производящей.)

Конечность первого алгоритма Гомори

Итерация алгоритма (шаги с 1 по 5) – LD-итерация, если не вводится отсечение или итерация Гомори, если вводится отсечение.

Элементы и столбцы симплекс-таблицы, полученной после выполнения первых t итераций, обозначим z_{ij}^{t} и β_{j}^{t} соответственно (z_{ij}^{0} – элементы начальной симплекс-таблицы).

Пусть при решении задачи алгоритмом Гомори выполняется бесконечная последовательность итераций

Конечность первого алгоритма Гомори

Из описания LD-метода имеем

$$\beta_0^0 \succ \beta_0^1 \succ \beta_0^2 \succ \cdots \succ \beta_0^t \succ \beta_0^{t+1} \succ \ldots . \tag{6}$$

Из конечности LD-метода следует, что число итераций Гомори бесконечно. Пусть $t_\nu + 1,\ \nu = 1, 2, \ldots,$ — порядковые номера этих итераций. Из (6) имеем

$$z_{00}^0 \geq z_{00}^1 \geq z_{00}^2 \geq \cdots \geq z_{00}^t \geq z_{00}^{t+1} \geq \ldots . \tag{7}$$

Конечность первого алгоритма Гомори

Рассмотрим подпоследовательность

$$z_{00}^{t_1},\ z_{00}^{t_2},\ \ldots,\ z_{00}^{t_\nu},\ \ldots\ , \qquad (8)$$

состоящую из элементов z_{00} тех с.-т., которые являются входными для итераций Гомори.

Пусть $z_{00}^{t_\nu}$ – нецелое. Тогда на итерации $t_\nu + 1$ нулевая строка будет производящей и

$$z_{00}^{t_\nu+1} = z_{00}^{t_\nu} - z_{0s}^{t_\nu}\frac{f_{00}^{t_\nu}}{f_{0s}^{t_\nu}}.$$

Конечность первого алгоритма Гомори

Т.к. $\boldsymbol{z_{0s}^{t_\nu} \geq 0}$ (с.-т. двойственно допустима) и $\boldsymbol{z_{0s}^{t_\nu} \geq f_{0s}^{t_\nu}}$, то

$$\boldsymbol{z_{00}^{t_\nu+1} \leq z_{00}^{t_\nu} - f_{00}^{t_\nu} = \lfloor z_{00}^{t_\nu} \rfloor < z_{00}^{t_\nu}.}$$

Таким образом, каждый интервал $\boldsymbol{(z, z+1)}$, где $\boldsymbol{z}$ – целое, содержит не более одного нецелого элемента последовательности (8).

Конечность первого алгоритма Гомори

Отсюда, монотонности и ограниченности снизу этой последовательности следует, что она стабилизируется на некотором целом значении. Тогда

$$\exists\, T_0\ \forall t \geq T_0:\ z_{00}^{t} = \bar{z}_{00}.$$

Тогда в силу (6)(строгого лексикографического убывания нулевого столбца)

$$z_{10}^{T_0} \geq z_{10}^{T_0+1} \geq \cdots \geq z_{10}^{t} \geq z_{10}^{t+1} \geq \cdots . \qquad (9)$$

Конечность первого алгоритма Гомори

1) Оптимальное значение целевой функции $\boldsymbol{x_0}$ ограничено.

2) Функция $\boldsymbol{x_0}$ целочисленна на множестве допустимых решений задачи ЦЛП.

3) Итерации 2-ух типов: либо LD-итерация, либо итерация Гомори.

4) $\boldsymbol{z_{ij}^t}$ и $\boldsymbol{\beta_j^t}$ – элементы и столбцы с.-т. через $\boldsymbol{t}$ итераций

Конечность первого алгоритма Гомори

5) Доказываем от противного. Предположили, что при решении задачи алгоритмом Гомори выполняется бесконечная последовательность итераций.

6) Тогда имеем

$$\beta_0^0 \succ \beta_0^1 \succ \beta_0^2 \succ \cdots \succ \beta_0^t \succ \beta_0^{t+1} \succ \ldots . \qquad (6)$$

7) Число итераций Гомори бесконечно. Пусть $t_\nu + 1$, $\nu = 1, 2, \ldots,$ — порядковые номера этих итераций.

Конечность первого алгоритма Гомори

8) Доказали, что

$$\exists\, T_0\ \forall t \geq T_0:\ z_{00}^{t} = \overline{z}_{00}\ \text{(целое)}.$$

9) Тогда в силу (30)(строгого лексикографического убывания нулевого столбца)

$$z_{10}^{T_0} \geq z_{10}^{T_0+1} \geq \cdots \geq z_{10}^{t} \geq z_{10}^{t+1} \geq \ldots\,. \qquad (9)$$

Конечность первого алгоритма Гомори

По условию $z_{10}^{t_\nu}$ – нецелое. Тогда на итерации $t_\nu + 1$ первая строка будет производящей и

$$z_{10}^{t_\nu+1} = z_{10}^{t_\nu} - z_{1s}^{t_\nu} \frac{f_{10}^{t_\nu}}{f_{1s}^{t_\nu}}, \qquad (10)$$

где $0 < f_{10}^{t_\nu} < 1$ и $0 < f_{1s}^{t_\nu} < 1$.

Конечность первого алгоритма Гомори

Пусть $z_{1s}^{t_\nu} < \mathbf{0}$. Т.к. $\beta_s^{t_\nu} \succ \mathbf{0}$, то $z_{0s}^{t_\nu} > \mathbf{0}$. Из условий

$$z_{00}^{t_\nu+1} = z_{00}^{t_\nu} - z_{0s}^{t_\nu}\frac{f_{10}^{t_\nu}}{f_{1s}^{t_\nu}},$$

$\mathbf{0} < f_{10}^{t_\nu} < \mathbf{1}$, $\mathbf{0} < f_{1s}^{t_\nu} < \mathbf{1}$ следует, что $z_{00}^{t_\nu+1} < z_{00}^{t_\nu}$. Противоречие т.к. $z_{00}^{t_\nu+1} = z_{00}^{t_\nu}$.

Конечность первого алгоритма Гомори

Таким образом из (10), учитывая неравенства $z_{1s}^{t_\nu} \geq 0$ и $z_{1s}^{t_\nu}/f_{1s}^{t_\nu} \geq 1$, следует

$$z_{10}^{t_\nu+1} \leq z_{10}^{t_\nu} - f_{10}^{t_\nu} = \lfloor z_{10}^{t_\nu} \rfloor < z_{10}^{t_\nu}.$$

Следовательно, $\lfloor z_{10}^{t_\nu} \rfloor < z_{10}^{t_\nu} < \lfloor z_{10}^{t_\nu} \rfloor + 1.$ Это означает, что каждый интервал $(z, z+1)$, где z – целое, содержит не более одного нецелого элемента из последовательности (9).

Конечность первого алгоритма Гомори

Т.к. с.-т. с номерами $\boldsymbol{t_\nu}$ прямо допустимы, то $\boldsymbol{z_{10}^{t_\nu} \geq 0}$. Итак последовательность с номерами $\boldsymbol{t_\nu}$ монотонно убывающая и ограниченна снизу, т.е. она стабилизируется на некотором целом неотрицательном значении (прямо допустимость). Тогда

$$\exists\, \boldsymbol{T_1 \geq T_0\ \forall t \geq T_1 :\ z_{10}^{t} = \overline{z}_{10}}.$$

Конечность первого алгоритма Гомори

Аналогичные утверждения можно провести и для оставшихся компонент вплоть до $\boldsymbol{n}$-ой.

Следовательно, существует такой номер $\boldsymbol{T_n}$, что для всех $\boldsymbol{t \geq T_n}$ и для всех $\boldsymbol{i = \overline{1, n}}$

$$\boldsymbol{z_{i0}^{t} = \bar{z}_{i0},} \text{ где } \boldsymbol{\bar{z}_{i0} \in Z^{+}.}$$

Подобное утверждение противоречит предположению о бесконечности числа итераций. Тем самым доказана конечность первого алгоритма Гомори.