ЗАДАЧИ КЛАССИЧЕСКОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Вариационное исчисление возникло при исследовании некоторых прикладных задач.

Пример: классическая изопериметрическая задача, в которой требуется среди замкнутых кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую наибольшую площадь.

Постановка задачи классического вариационного исчисления

Постановка на языке функционального анализа:

Задачи вариационного исчисления — это задачи поиска экстремума функционала или отображения, которое переводит вектор-функции из некоторого подмножества функционального пространства в числа.

Особенность задач вариационного исчисления — неизвестными являются функции.

Множество допустимых решений задачи представляет собой подмножество некоторого функционального пространства.

Допустимые решения удовлетворяют общим требованиям для элементов пространства, например, непрерывности, дифференцируемости и т. д., а также ограничениям и связям между неизвестными.

Постановка задачи классического вариационного исчисления

Общая постановка:

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) \to \inf(\sup), \tag{1}$$

$$G_1(t,x(t),\dot{x}(t),u(t))=0,\ G_2(t,x(t),\dot{x}(t),u(t))\le 0, \tag{2}$$

$$u(t)\in U(t)\in R^r, \tag{3}$$

$$(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))\in\Gamma. \tag{4}$$

охватывает большинство задач оптимального управления и вариационного исчисления.

Постановка задачи классического вариационного исчисления

Переменные $x=(x^1,\ldots,x^n)$ называют *фазовыми переменными*, а $u=(u^1,\ldots,u^r)$ – *управлениями*.

Функционал J может быть функционалом одного из следующих трех типов. *Интегральный функционал* имеет следующую форму:

$$J_1(x(\cdot),u(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1} f(t,x(t),\dot{x}(t),u(t))dt,$$

где функция $f:R\times R^n\times R^n\times R^r\to R$ называется *интегрантом*.

Функционалы вида $J_2(x(\cdot))=\psi(t_0,x(t_0),t_1,x(t_1))$, где $\psi:R\times R^n\times R\times R^n\to R$, называются *терминальными*. Если функционал представим в виде суммы интегрального и терминального функционалов, то он называется *функционалом смешанного типа*.

Ограничения вида (2), где $G_i : R \times R^n \times R^n \times R^r \to R^{k_i}$, $i = 1, 2$, называются *функциональными*, а ограничения вида (3) – *нефункциональными*.

Граничные условия задаются выделением в пространстве $R \times R^n \times R \times R^n$ подмножества Γ, которому должны принадлежать концы траектории, т. е. точка $(t_0, x(t_0), t_1, x(t_1))$. Как правило, рассматриваются следующие граничные условия:

– *закрепленные*, когда значения траектории закреплены на обоих концах отрезка $[t_0, t_1]$, при этом сам отрезок предполагается фиксированным: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$;

– *свободный правый или левый конец*, когда соответствующий конец отрезка $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным, но на нем нет условия на фазовую траекторию;

– *периодические*, когда отрезок $[t_0, t_1]$ фиксирован и фазовая траектория принимает равные значения на концах.

Отрезок $[t_0, t_1]$ не предполагается закрепленным. Если же он фиксируется, то соответствующую задачу называют *задачей с закрепленным временем*.

Если функционал (1) является интегральным, то задача (1)–(4) называется *задачей Лагранжа*; если функционал терминальный, то она называется *задачей Майера* и, наконец, если функционал смешанный, то соответствующая задача называется *задачей Больца*.

Все три постановки в значительной мере равносильными. Если, например, задан интегральный функционал, то, введя новую координату x^{n+1} и пополнив систему (2) уравнением $\dot{x}^{n+1} - f = 0$ с граничным условием $x^{n+1}(t_0) = 0$, задача о минимизации функционала

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} f\,dt$$

сводится к задаче минимизации терминального функционала

$$J_2 = x^{n+1}(t_1).$$

Наоборот, если требуется минимизировать терминальный функционал $J_2 = \psi(t_1, x(t_1))$ при фиксированных значениях t_0 и $x(t_0)$, то, предполагая, что функция ψ дифференцируема, положим

$$f(t, x, \dot{x}) = \frac{\partial \psi(t, x)}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi(t, x)}{\partial x}, \dot{x} \right),$$

откуда получим, что

$$J_2 = \psi(t_1, x(t_1)) = J_1.$$

Классические задачи

1. Все функции, входящие в описание задачи, предполагаются гладкими, по меньшей мере, непрерывно дифференцируемыми.
2. В них отсутствуют нефункциональные ограничения вида (3).

Приведем несколько примеров частных задач, укладывающихся в общую схему.

Простейшей векторной задачей называется задача следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} &J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) \to \inf, \\ &(x(t_0), x(t_1)) \in \Gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

В (5) отрезок $[t_0, t_1]$ предполагается фиксированным, функция L – определенной и непрерывно дифференцируемой в некоторой области пространства $R \times R^n \times R^n$; множество Γ, задающее граничные условия, предполагается произвольным подмножеством пространства $R^n \times R^n$. Если $n = 1$, то задача (5) называется *простейшей задачей.*

Задачей Лагранжа с ограничениями в разрешенной форме и фазовыми ограничениями типа равенств и неравенств называют следующую задачу:

$$J(x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))\,dt \to \inf, \tag{6}$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \tag{7}$$

$$g_1(t, x(t)) = 0,\ g_2(t, x(t)) \le 0, \tag{8}$$

$$h_0(t_0, x(t_0)) = 0,\ h_1(t_1, x(t_1)) = 0, \tag{9}$$

$$u \in U. \tag{10}$$

Здесь интегральный функционал не зависит от $\dot{x}$. Ограничения разделены на *разрешенные* – (7) и *фазовые* – (8). Граничные условия описываются соотношениями (9).

При рассмотрении задачи Лагранжа будем предполагать, что отрезок $[t_0, t_1]$ является фиксированным и ограничение (10) отсутствует.

Задача (6)–(10) называется *автономной*, если во всех входящих в ее определение функциях и отображениях отсутствует явная зависимость от времени.

Линейными задачами оптимального управления будем называть задачи с закрепленным временем следующего вида:

$$\int_{t_0}^{t_1} \big((a(t), x(t)) + (b(t), u(t)) \big) dt \to \inf ,$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u ,$$

$$\big(g_i(y), x(t)\big) \le \alpha_i(t), \; i = 1, \ldots, m ,$$

$$\big(h_{kj}, x(t_k)\big) = \beta_{kj}, \; k = 0,1, \;\; j = 1, \ldots, s_k , \; u \in U .$$

Иногда требование о закрепленности времени при определении линейных задач опускают.

Сильный и слабый экстремум в задачах классического вариационного исчисления

Поставленные выше задачи обладают все еще неопределенностью, так как не описан класс допустимых элементов.

Задача Лагранжа (6)–(9) с фиксированным временем в рамках классического вариационного исчисления будет исследоваться в банаховых пространствах $C_1^n([t_0,t_1])\times C^r([t_0,t_1])$, где $C_1^n([t_0,t_1])$ – пространство непрерывно дифференцируемых вектор-функций, а $C^r([t_0,t_1])$ – пространство непрерывных вектор-функций. Норму в пространстве C_1 обозначим как $\|\cdot\|_1$, норму в пространстве C, если мы хотим сопоставить ее с нормой в пространстве C_1, иногда будем обозначать $\|\cdot\|_0$. Исследование простейших задач проводится в банаховых пространствах $C_1^n([t_0,t_1])$.

Локальный минимум в пространстве $C_1^n \times C^r$ в случае задачи Лагранжа, или в пространстве C_1^n в случае простейших задач, называется *слабым*. Иначе говоря, пара $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ доставляет *слабый локальный минимум* функционалу $J(x(\cdot),u(\cdot))$ в задаче (6)–(9), если найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для любой допустимой пары $(x(\cdot),u(\cdot)) \in C_1^n \times C^r$ такой, что

$$\left\| x(\cdot) - x_*(\cdot) \right\|_1 < \varepsilon, \quad \left\| u(\cdot) - u_*(\cdot) \right\|_0 < \varepsilon,$$

выполняется неравенство

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) \geq J(x_*(\cdot),u_*(\cdot)).$$

При этом пара называется допустимой в задаче, если она удовлетворяет ограничениям (7) и (8) и граничным условиям (9). Совершенно аналогично определяется слабый минимум для простейшей векторной задачи (5).

Локальный экстремум по x в топологии пространства C_1^n называется *сильным*. Иначе говоря, допустимая пара $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ дает *сильный локальный минимум* функционалу J в задаче (6) – (9), если найдется такое число $\varepsilon > 0$, что для любой допустимой пары $(x(\cdot), u(\cdot))$, для которой

$$\left\| x(\cdot) - x_*(\cdot) \right\|_0 < \varepsilon ,$$

выполняется неравенство

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) \geq J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) .$$

Аналогичным образом определяется сильный минимум для простейшей векторной задачи (5).

Допустимые управления и управляемые процессы в задачах оптимального управления. Оптимальные процессы

Требование непрерывности управлений во многих случаях не является естественным. Нередко из самой постановки задачи вытекает необходимость рассматривать более широкий класс допустимых управлений. Иногда в качестве такого берут класс кусочно-непрерывных управлений. В дальнейшем в качестве допустимых управлений будут рассматриваться произвольные ограниченные измеримые функции, принимающие значения из множества $U(t)$.

При таком выборе допустимых управлений требуется уточнить понятие управляемого процесса. Процесс $(x(t),u(t))$ называется *управляемым на отрезке* $[t_0,t_1]$, если на этом отрезке функция $u(t)$ – допустимое управление, $x(t)$ – абсолютно непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая почти всюду уравнению (7).

В понятие допустимого управляемого процесса включается и отрезок времени, на котором этот процесс рассматривается.

Таким образом, управляемый процесс, допустимый в задаче (6)–(10), это тройка $(x(t),u(t),[t_0,t_1])$ такая, что вектор-функции $x(t)$ и $u(t)$ образуют управляемый процесс на отрезке $[t_0,t_1]$, и при этом фазовые переменные $x(t)$ удовлетворяют фазовым ограничениям (8) и граничным условиям (9).

Допустимый процесс $(x_*(t),u_*(t),[t_{0*},t_{1*}])$ назовем *оптимальным*, если найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для всякого другого допустимого процесса $(x(t),u(t),[t_0,t_1])$, для которого при всех $t \in [t_0,t_1] \cap [t_{0*},t_{1*}])$ выполняются условия $\left|t_0 - t_{0*}\right| < \varepsilon$, $\left|t_1 - t_{1*}\right| < \varepsilon$ и $\left|x(t) - x_*(t)\right| < \varepsilon$, имеет место неравенство

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) \geq J(x_*(\cdot),u_*(\cdot)).$$

В описанной ситуации говорят еще, что процесс $(x_*(t),u_*(t),[t_{0*},t_{1*}])$ доставляет сильный минимум в задаче (6)–(10).

Таким образом, возвращаясь к задачам классического вариационного исчисления, в расширенное понимание сильного минимума вкладывается следующий смысл. Проиллюстрируем его на векторной задаче классического вариационного исчисления.

Будем говорить, что вектор-функция $x_*(t)$ доставляет сильный минимум в задаче (5), если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для всякой функции $x(t) \in W^n_{\infty,1}([t_0, t_1])$, удовлетворяющей граничным условиям и неравенству

$$\|x(\cdot) - x_*(\cdot)\|_0 < \varepsilon ,$$

имеет место неравенство

$$J(x(\cdot)) \geq J(x_*(\cdot)) .$$

Элементарный вывод необходимых условий экстремума для простейших задач классического вариационного исчисления

Вывод *необходимых условий Эйлера*.

Начнем с простейшей задачи вариационного исчисления с закрепленными концами:

$$\left.\begin{aligned} &J(x(\cdot))=\int\limits_{t_0}^{t_1} L(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt \to \inf,\\ &x(t_0)=x_0,\;\; x(t_1)=x_1. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Предположим, что функция $L(t,x,y)$ непрерывно дифференцируема в некоторой области U пространства R^3. Задачу (11) будем исследовать на слабый экстремум, т. е. в пространстве $C_1([t_0,t_1])$.

Вывод уравнения Эйлера состоит из трех этапов.

Первый этап состоит в доказательстве того, что функционал J обладает первой вариацией в любой точке $x_*(\cdot)$ такой, что точки $(t, x_*(t), \dot{x}_*(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, принадлежат области U, и в получении необходимого условия в терминах первой вариации. Рассмотрим функцию одной переменной

$$\varphi(\lambda) = J(x_*(\cdot) + \lambda x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} \psi(t, \lambda)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x_*(t) + \lambda x(t), \dot{x}_*(t) + \lambda \dot{x}(t))\, dt, \quad (12)$$

порожденную *вариацией* $x(t, \lambda) = x_*(t) + \lambda x(t)$ точки $x_*(\cdot)$ по направлению точки $x(\cdot)$. При наших допущениях относительно L, $x_*(\cdot)$ и $x(\cdot)$ функция $\psi(t, \lambda)$ является дифференцируемой по λ при достаточно малых λ, и при этом производная $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}$ непрерывна, так как $\frac{\partial \psi(t, \lambda)}{\partial \lambda} = L_x(t, x_*(t) + \lambda x(t),$ $\dot{x}_*(t) + \lambda \dot{x}(t))x(t) + L_{\dot{x}}(t, x_*(t) + \lambda x(t), \dot{x}_*(t) + \lambda \dot{x}(t))\dot{x}(t)$.

Следовательно, допустимо дифференцирование в (12) под знаком интеграла и при этом

$$\varphi'(0) = \delta J(x_*(\cdot), x(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} (q(t)x(t) + p(t)\dot{x}(t))\, dt,$$

где

$$q(t) = L_x(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)), \quad p(t) = L_{\dot{x}}(t, x_*(t), \dot{x}_*(t)).$$

Так как исследуемая функция $x_*(t)$ допустима, то для любой функции $x(t)$, принадлежащей подпространству $L_0 = \{x(t) \in C_1([t_0, t_1]) \mid x(t_0) = x(t_1) = 0\}$, функция $x_*(t) + \lambda x(t)$ будет проходить через те же граничные точки, что и функция $x_*(t)$. Следовательно, если $x_*(t)$ есть решение задачи (11), то при условии, $x(t) \in L_0$, функция, определяемая соотношением (12), должна иметь минимум в точке нуль. В итоге получаем необходимое условие экстремума

$$\varphi'(0) = \delta J(x_*(\cdot), x(\cdot)) = 0, \text{ для всех } x(\cdot) \in L_0. \tag{13}$$

Первый этап вывода закончен.