

# ЛЕКЦИЯ № 5

## Метод ветвей и границ

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ (идея)

Рассмотрим задачу:

$$\min\{f(x) | x \in Q\}$$

1. Множество  $Q$  должно быть разложимым, т.е. существует конечное разбиение на атомарные подмножества.

2. Заданы функции:  $x(d)$  – "наилучшее" решение,  $b(d)$  – ветвления и  $H(d)$  – нижняя граница.

$$0 < H(d) \leq \min_{x \in d} f(x)$$

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ (идея)

Функция  $H(d)$  — невозрастающая, то есть такая, что  $H(d_1) \geq H(d_2)$ , если  $d_1 \subseteq d_2$ .

3. Задан рекорд  $x_0$  — "наилучшее" найденное допустимое решение.

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Пусть к очередному шагу имеется разбиение  $t_1, \dots, t_L$  множества непроверенных решений и рекорд  $x^0$ . На первом шаге имеем  $t_1 = Q$ ,  $x^0$  – произвольный элемент множества  $Q$ .

**Описание текущего шага.** Проверка элементов разбиения:

множество  $t_l$  проверено и отбрасывается если или

$$1) H(t_l) \geq f(x^0),$$

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

или

2) функция  $x(d)$  определена на множестве  $t_l$ .

причём, если

$$f(x(t_l)) < f(x^0),$$

то устанавливается новое значение рекорда  $x^0 = x(t_l)$ .

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Если отброшенными оказываются все элементы разбиения, то алгоритм заканчивает работу и  $x^0$  – решение, найденное в результате его работы.

Пусть  $t'_1, \dots, t'_{L'}$ ,  $0 < L' \leq L$  – множества, не отброшенные в результате проверок. Выберем среди них некоторое "перспективное" подмножество  $t'_{l_0}$ .

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Применим к нему функцию ветвления  $b(d)$ , в результате чего получим его разбиение  $d_1, \dots, d_N$  и в целом новое разбиение

$$t'_1, \dots, t'_{l_0-1}, d_1, \dots, d_N, t'_{l_0+1}, \dots, t'_{L'}$$

множества неотброшенных решений.

После этого начинается следующий шаг.

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Конечность алгоритма:

1. На любом шаге множество непросмотренных решений – объединение конечного числа разложимых подмножеств.
2. На каждом шаге алгоритма хотя бы один элемент разбиения либо отбрасывается, либо разбивается на подмножества, каждое из которых состоит из меньшего числа атомарных множеств.
3. Атомарные множества всегда отбрасываются.

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Что можно сказать о полученном в результате работы алгоритма рекорде  $x^0$ ?

Пусть  $Q_1$  – объединение подмножеств, отброшенных по первому правилу, а  $Q_2$  – объединение подмножеств, отброшенных по второму правилу.

Тогда  $Q = Q_1 \cup Q_2$ .

Если  $Q^* \cap Q_1 \neq \emptyset$ , то  $x^0$  – оптимальное решение вне зависимости от способа задания  $x(d)$ .

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Если  $Q^* \cap Q_1 = \emptyset$ , то  $Q^* \subseteq Q_2$ , т.е. найдутся  $d_i$  такие, что  $Q^* \cap d_i \neq \emptyset$ ,  $d_i \subseteq Q_2$  и  $Q^* \subseteq \bigcup_i d_i$

Случай 1.  $f(x(d)) = \inf_{x \in d} f(x)$ . Отсюда и определения  $Q_2$  имеем, что  $x(d_i)$  – оптимальное решение для любого  $i$ . Пусть  $d_1$  – первое подмножество отброшенное по условию 2. Тогда  $f(x^0) \leq f(x(d_1))$ .

## МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

Случай 2.  $f(x(d)) \leq (1 + \varepsilon)f(x^*(d))$ .  
Отсюда и определения  $Q_2$  имеем, что  $x(d_i)$  –  $\varepsilon$ -оптимальное решение для любого  $i$ . Пусть  $d_1$  – первое подмножество отброшенное по условию 2. Тогда  $f(x^0) \leq f(x(d_1)) \leq (1 + \varepsilon)f(x^*(d_1))$ .

# МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ

При разработке алгоритма МВиГ необходимо конкретизировать следующие элементы общей схемы:

- атомарные множества решений;
- способ задания подмножеств решений;
- функцию ветвления;
- способ вычисления нижней границы;
- функцию выбора наилучшего решения;
- правило выбора перспективного элемента разбиения.

## Метод ветвей и границ

Рассмотрим задачу, в которой целевая функция удовлетворяет условию Липшица.

Ограничимся задачей минимизации на гиперкубе:  $f(x) \longrightarrow \inf_{x \in Q}$ , где  $Q = \{x = (x_1, \dots, x_n) : 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, n\}$

Соглашения:

$$|f(x) - f(y)| \leq L \|x - y\|_{\infty} \text{ для всех } x, y \in Q, \quad (1)$$

где  $L = \text{const} > 0$  – константа Липшица,

## Метод ветвей и границ

$$\|x - y\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Из (1)  $\implies$  функция  $f$  – непрерывна и, следовательно, достигает минимального значения  $f^*$  на гиперкубе.

Выберем на отрезке  $[0, 1]$  (оси  $j$ ) следующие точки

$$x_j^1 = \frac{h}{2}, x_j^2 = x_j^1 + h, \dots, x_j^{i+1} = x_j^i + h, \dots,$$

## Метод ветвей и границ

$$\dots, x_j^m = \max\{x_j^1 + (m - 1)h, 1\},$$

где  $h = \frac{2\varepsilon}{L}$  – шаг сетки, а  $m$  – подходящее натуральное число.

На гиперкубе  $Q$  введем сетку

$$Q_h = \{x^{i_1 \dots i_n} = (x_1^{i_1}, x_2^{i_2}, \dots, x_j^{i_j}, \dots, x_n^{i_n})\},$$

где  $j$ -ая координата  $x_j^{i_j}$  принимает одно из следующих значений

$$x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^m.$$

## Метод ветвей и границ

Пусть

$$F_h = \min_{Q_h} f(x^{i_1 \dots i_n}).$$

**Теорема.** Для любой функции  $f(x)$ , удовлетворяющей условию Липшица (1), справедлива оценка

$$f^* \leq F_h \leq f^* + \varepsilon. \quad (2)$$

**Доказательство.** Множество

$$Q_{i_1 \dots i_n} = \left\{ x \in R^n : \|x - x^{i_1 \dots i_n}\|_\infty \leq \frac{h}{2} \right\}$$

## Метод ветвей и границ

– гиперкуб с центром в точке  $x^{i_1 \dots i_n}$  (границы параллельны осям координат, длина рёбер –  $h$ ).

Для любой точки  $x \in Q$  найдётся гиперкуб  $Q_{i_1 \dots i_n}$ , содержащий эту точку  $\implies$

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x^{i_1 \dots i_n}) - L \|x - x^{i_1 \dots i_n}\|_\infty \geq \\ &\geq F_h - L \frac{h}{2} = F_h - \varepsilon \implies \end{aligned}$$

Имеем  $f^* \leq F_h \leq f^* + \varepsilon$ . ■

## Метод ветвей и границ

Рассмотрим произвольный гиперкуб  $\Gamma[\mathbf{x}^c, \mathbf{h}]$  с центром  $\mathbf{x}^c$  и длиной стороны  $\mathbf{h}$ :

$$\Gamma[\mathbf{x}^c, \mathbf{h}] = \left\{ \mathbf{x} \in R^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^c\|_\infty \leq \frac{\mathbf{h}}{2} \right\}.$$

Очевидно, что  $\forall \mathbf{x} \in \Gamma[\mathbf{x}^c, \mathbf{h}]$ :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^c) + f(\mathbf{x}^c) \geq \\ &\geq -L\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^c\|_\infty + f(\mathbf{x}^c) \geq f(\mathbf{x}^c) - Lh/2. \end{aligned}$$

## Метод ветвей и границ

Естественно, тогда определить нижнюю границу на гиперкубе  $\Gamma[x^c, h]$  равенством  $H(\Gamma[x^c, h]) = f(x^c) - Lh/2$ .

Функцию выбора наилучшего решения определим на г.-кубах со стороной  $h$  (играют роль атомарных множеств решений) не превосходящей  $\frac{2\varepsilon}{L}$ , положив

$$x(\Gamma[x^c, h]) = x^c.$$

Подмножества решений будем задавать в виде набора гиперкубов.

## Метод ветвей и границ

На первом шаге имеем  $t_1 = \Gamma[x^R, \Delta]$ , где первый рекорд  $x^R$  – центр г.-куба со стороной  $\Delta^R = \Delta$ .

Пусть к очередному шагу имеется разбиение

$$t_1 = \Gamma[x^1, h_1], \dots, t_L = \Gamma[x^L, h_L]$$

и рекорд  $x^R$  – центр г.-куба со стороной  $\Delta^R$ .

Очередной шаг начинается с проверки гиперкуба с номером  $l$ . Он считается проверенным и отбрасывается, если выполняется одно из следующих условий:

## Метод ветвей и границ

1)  $H(\Gamma[x^l, h_l]) \geq f(x^R),$

2) сторона г.-куба  $h_l$  не превосходит величины  $\frac{2\epsilon}{L}.$

При этом, если реализуется второй случай и

$$f(x^l) < f(x^R),$$

то устанавливается новое значение рекорда  $x^R = x^l$  и величины  $\Delta^R = h_l.$

Дополнительное правило:

## Метод ветвей и границ

Случай 1. (Текущий рекорд хуже )

Если  $f(x^l) < f(x^R)$ , то

среди оставшихся гиперкубов разбиения отбрасываем те, которые содержатся в г.-кубе

$$\Gamma[x^R, \frac{2(f(x^R) - f(x^l))}{L}].$$

По определению нижней границы имеем  $\forall x \in \Gamma[x^c, h]$  неравенство  $f(x) \geq H(\Gamma[x^c, h]) = f(x^c) - Lh/2$ .

## Метод ветвей и границ

Поэтому для любой точки  $\mathbf{x}$  из данного г.-куба имеем

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\geq H\left(\Gamma\left[\mathbf{x}^R, \frac{2(f(\mathbf{x}^R) - f(\mathbf{x}^l))}{L}\right]\right) = \\ &= f(\mathbf{x}^R) - \frac{L}{2} \times \frac{2(f(\mathbf{x}^R) - f(\mathbf{x}^l))}{L} = f(\mathbf{x}^l). \end{aligned}$$

Случай 2. (Текущий рекорд лучше)

Если  $f(\mathbf{x}^R) \leq f(\mathbf{x}^l)$ , то среди оставшихся

## Метод ветвей и границ

гиперкубов разбиения отбрасываем те, которые содержатся в г.-кубе

$$\Gamma[x^l, \frac{2(f(x^l) - f(x^R))}{L}].$$

Т.к. для любой точки  $x$  из данного г.-куба имеем  $f(x) \geq f(x^R)$ .

Если отброшены все элементы разбиения, то алгоритм заканчивает работу и  $x^R$  – требуемое решение.

## Метод ветвей и границ

Если есть неотброшенные множества, то выбираем "перспективное" подмножество  $\Gamma[x^l, h_l]$ . Функция ветвления  $b(\cdot)$  разбивает его на  $2^n$  одинаковых подкубов со стороной  $\frac{h_l}{2}$ .

После этого начинается следующий шаг.

## Метод ветвей и границ

Замечание. Если в процессе работы алгоритма не происходит смены рекорда по правилу 2, то полученный рекорд – оптимальное решение задачи. В противном случае  $\epsilon$  приближенное решение.