ЛЕКЦИЯ № 1

от 02.09.13

Лектор: Давыдов Иван Александрович

1. Понятие экстремальной задачи

2. Элементы алгоритмической теории экстремальных задач

3. Классификация задач

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Алексеева Е. В., Кутненко О. А., Плясунов А. В. Численные методы оптимизации. Новосибирск: НГУ, 2008.*

[2] Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления. М.:Наука, 1969.

[3] Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

[4] *Глебов Н. И., Кочетов Ю. А., Плясунов А. В. Методы оптимизации. Новосибирск: НГУ, 2000.*

[5] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.

[6] *Ларин Р. М., Плясунов А. В., Пяткин А. В. Методы оптимизации. Примеры и задачи. Новосибирск: НГУ, 2003, 2009.*

[7] Мину М. Математическое программирование. М.: Наука, 1990.

ЛИТЕРАТУРА

[8] Моисеев Н. Н., Иванилов Ю. П., Столярова Е. М. Методы оптимизации. М.: Наука, 1978.

[9] Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.

[10] Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации. М.: Физматлит, 2005.

[11] Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991.

[12] Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.

[13] Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. Теория, методы и приложения. М.:Наука, 1969.

ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ (ОПТИМИЗАЦИОННАЯ) ЗАДАЧА (P)

Найти:

$$\min f(x) \tag{1}$$

при условии, что

$$\varphi_i(x) \le 0, i = \overline{1, m}, \tag{2}$$

$$x \in S \subseteq R^n \text{ или } Z^n \text{ или } B^n. \tag{3}$$

$x = (x_1, \ldots, x_n)$– вектор переменных;

f – целевая функция задачи;

$\varphi_i(x) \le 0, i = \overline{1, m}, x \in S$ – ограничения задачи.

Методы оптимизации $\equiv$ Теория оптимизации $\equiv$ Теория экстремальных задач $\equiv$ Математическое программирование

1. Теоретическое исследование вопросов существования оптимальных решений экстремальных задач.

2. Необходимые и/или достаточные условия экстремума.

3. Разработка численных методов решения.

4. Исследование сложности задач (классы PO, FPTAS, PTAS, APX, poly-APX, exp-APX, NPO).

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Вектор $\boldsymbol{x}$ – допустимое решение задачи $\boldsymbol{P}$, если выполняются ограничения (2),(3).

$\boldsymbol{Q(P) = \{x \in R^n | \varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}, x \in S\}}$ – множество допустимых решений задачи $\boldsymbol{P}$.

Оптимальное решение (глобальный минимум): любое допустимое решение задачи, на котором достигается минимум целевой функции $\boldsymbol{f}$ на множестве $\boldsymbol{Q(P)}$.

1. $\boldsymbol{g(x) = 0 \equiv g(x) \leq 0, -g(x) \leq 0}$.

$\boldsymbol{g(x) \leq 0 \equiv g(x) + y = 0}$, где $\boldsymbol{y \geq 0}$.

2. $\boldsymbol{\max\limits_{x \in Q} g(x) \equiv \min\limits_{x \in Q} -g(x)}$

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Задача оптимизации решена, если
– либо найдено её оптимальное решение,
– либо найден конечный инфинум целевой функции на множестве $\boldsymbol{Q(P)}$, в случае, когда оптимального решения не существует,
– либо доказано, что целевая функция неограничена снизу на множестве допустимых решений,
– либо установлено, что множество допустимых решений задачи $\boldsymbol{P}$ пусто.

Лагранжева теория двойственности

Рассмотрим задачу P с произвольными функциями f и φ_i:

$$f(x) \longrightarrow \min \tag{1}$$

$$\varphi_i(x) \leq 0, i = \overline{1, m}. \tag{2}$$

Определение 1. Функцию

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x),$$

определенную при всех x и λ, назовем функцией Лагранжа для задачи (1), (2).

Лагранжева теория двойственности

Определение 2. **Пара $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ называется седловой точкой функции Лагранжа, если**

$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}) \overset{(3)}{\leq} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) \overset{(4)}{\leq} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^*) \ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n, \forall \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}.$$

Пусть

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{\lambda} \geq 0} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$$

Тогда

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}, \\ +\infty, & \boldsymbol{x} \notin \boldsymbol{Q}. \end{cases} \Longrightarrow$$

Лагранжева теория двойственности

Задача $\boldsymbol{P}$ эквивалентна следующей:

$$\boldsymbol{g(x)} \longrightarrow \min$$

Пусть

$$\boldsymbol{h(\lambda) = \inf_{x \in R^n} L(x, \lambda).}$$

Рассмотрим задачу $(\boldsymbol{D})$:

$$\boldsymbol{h(\lambda) \longrightarrow \max_{\lambda \geq 0}.}$$

$(\boldsymbol{D})$ – задача двойственная к прямой (или исходной) задаче $\boldsymbol{P}$. $\boldsymbol{\lambda_1, \ldots, \lambda_m}$ – двойственные переменные, а $\boldsymbol{x_1, \ldots, x_n}$ — прямые переменные.

Лагранжева теория двойственности

Если $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}$, то $\boldsymbol{x}$ — допустимое решение прямой задачи, а $\boldsymbol{\lambda}$ — допустимое решение двойственной задачи.

Лемма 1. (Слабая теорема двойственности).

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{Q}\ \forall \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}\ (\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\lambda}) \leq \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})).$$

Лемма 2. **Если $\overline{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{Q}$ и $\overline{\boldsymbol{\lambda}} \geq \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{f}(\overline{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{h}(\overline{\boldsymbol{\lambda}})$, то $\overline{\boldsymbol{x}}$ и $\overline{\boldsymbol{\lambda}}$ — оптимальные решения задачи $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{D}$, соответственно.**

Лагранжева теория двойственности

Теорема 1. **Вектора $\overline{x}, \overline{\lambda}$ — оптимальные решения прямой и двойственной задачи и $f(\overline{x}) = h(\overline{\lambda})$ тогда и только тогда, когда пара $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ — седловая точка функции Лагранжа. При этом $L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = f(\overline{x}) = h(\overline{\lambda})$.**

Следствие 1. **Пусть $\overline{x} \in Q(P)$, $\overline{\lambda} \geq 0$. Следующие утверждения эквивалентны:**

1. **Пара $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ — седловая точка функции Лагранжа.**

2. $f(\overline{x}) = h(\overline{\lambda})$.

3. $\min\limits_{x} \sup\limits_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = \max\limits_{\lambda \geq 0} \inf\limits_{x} L(x, \lambda)$.

Лагранжева теория двойственности

Следствие 2. Пусть $x^*, \overline{x} \in Q$, $\lambda^*, \overline{\lambda} \geq 0$.

Если пары $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ и (x^*, λ^*) — седловые точки функции Лагранжа, то пары $(\overline{x}, \lambda^*)$ и $(x^*, \overline{\lambda})$ — также седловые точки функции Лагранжа, причем

$$L(x^*, \overline{\lambda}) = L(\overline{x}, \lambda^*) = L(\overline{x}, \overline{\lambda}) = L(x^*, \lambda^*).$$

Линейное программирование (ЛП)

Задача линейного программирования (ЛП) в канонической форме:

$$\boldsymbol{w(x) = (c, x) \longrightarrow \min} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{Ax = b,} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{x \geq 0,} \tag{7}$$

где $\boldsymbol{c = (c_j), x = (x_j) \in R^n}$, $\boldsymbol{A = (a_{ij}) - (m \times n)}$ матрица, $\boldsymbol{b = (b_i) \in R^m}$, $\boldsymbol{m \leq n}$, $\boldsymbol{rang(A) = m}$.

$$\boldsymbol{Ax = b \equiv (a_i, x) = b_i, i = \overline{1, m},}$$

$$\boldsymbol{Ax = b \equiv \sum_{j=1}^{n} A_j x_j = b}$$

ЛП: двойственная задача

Задача $\mathbf{(5)-(7)}$ эквивалентна задаче

$$\boldsymbol{(c,x)\longrightarrow \min}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{(a_i,x)-b_i\le 0,} &\qquad \boldsymbol{\lambda_i^1\ge 0}\\ \boldsymbol{-(a_i,x)+b_i\le 0,} &\qquad \boldsymbol{\lambda_i^2\ge 0}\\ \boldsymbol{-x_j\le 0.} &\qquad \boldsymbol{\mu_j\ge 0}\end{aligned}$$

Ее функция Лагранжа:

$$\boldsymbol{L(x,\lambda^1,\lambda^2,\mu)=(c,x)+(\lambda^1,Ax-b)+(\lambda^2,-Ax+b)+(\mu,-x)=}$$

$$\boldsymbol{=\Big(c+(\lambda^1-\lambda^2)A-\mu,x\Big)-(\lambda^1-\lambda^2,b).}$$

Следовательно, целевая функция двойственной задачи имеет вид:

ЛП: двойственная задача

$$h(\boldsymbol{\lambda}^1, \boldsymbol{\lambda}^2, \boldsymbol{\mu}) = \inf_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^1, \boldsymbol{\lambda}^2, \boldsymbol{\mu}) =$$

$$= \begin{cases} -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2), & \text{если } \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \\ -\infty, & \text{иначе.} \end{cases} \Longrightarrow$$

Двойственная задача

$$h(\boldsymbol{\lambda}^1, \boldsymbol{\lambda}^2, \boldsymbol{\mu}) \longrightarrow \sup_{\boldsymbol{\lambda}^1 \geq 0, \boldsymbol{\lambda}^2 \geq 0, \boldsymbol{\mu} \geq 0},$$

эквивалентна задаче ЛП:

$$-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2) \longrightarrow \max$$

$$\boldsymbol{c} + (\boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2)\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} \equiv \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2)\boldsymbol{A} \geq \mathbf{0}.$$

Умножим ограничения на $-\mathbf{1}$, обозначим $\boldsymbol{y} = -(\boldsymbol{\lambda}^1 - \boldsymbol{\lambda}^2)$

ЛП: двойственная задача

Получим

$$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow \max \tag{8}$$

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} \le \boldsymbol{c}. \tag{9}$$

Замечание 1. Для задач (5)-(7) и (8)-(9) выполняются все утверждения: л. 1, л. 2, теор. 1, следствия 1 — 2.

Теорема 2. Задача двойственная к задаче (8)-(9) совпадает с исходной задачей (5)-(7).

Доказательство. Задача (8)-(9) эквивалентна задаче

$$-(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y}) \longrightarrow \min$$

$$\boldsymbol{y}\boldsymbol{A} \le \boldsymbol{c}.$$

ЛП: двойственная задача

$$\boldsymbol{yA \le c} \equiv \text{системе неравенств } \boldsymbol{(y, A_j) - c_j \le 0}, \qquad \boldsymbol{x_j \ge 0}$$

(сопоставили каждому ограничению двойственную переменную (множитель Лагранжа))

Функция Лагранжа:

$$\boldsymbol{L(y,x) = -(b,y) + (x, yA - c) =}$$

$$\boldsymbol{-(b,y) + (Ax, y) - (x, c) = (Ax - b, y) - (c, x).}$$

Целевая функция двойственной задачи

$$\boldsymbol{h(x) = \inf_y L(y,x) =}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{-(c,x)}, & \text{если } \boldsymbol{Ax = b}, \\ \boldsymbol{-\infty}, & \text{иначе}. \end{cases} \Longrightarrow$$

ЛП: двойственная задача

Задача

$$\max_{x \geq 0} h(x)$$

эквивалентна задаче ЛП:

$$-(c, x) \longrightarrow \max$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0$$

или

$$\min(c, x)$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0.$$

■

ЛП: двойственная задача

Прямая задача		Двойственная задача
$w(x)=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$		$z(y)=\sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max$
$a_i x \ge b_i$	$i \in I_1$	$y_i \ge 0$
$a_i x = b_i$	$i \in I_2$	y_i — своб.
$x_j \ge 0$	$j \in J_1$	$yA_j \le c_j$
x_j — своб.	$j \in J_2$	$yA_j = c_j$.

Упражнение.

Техника получения этой схемы: либо повторить выкладки, приведшие к задаче (8), (9), либо воспользоваться сводимостью общей задачи ЛП к задаче ЛП в канонической форме и применить готовый рецепт (задача (8), (9)).

ЛП: понятие базисного допустимого решения (б.д.р.).

Базис — любой набор $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(1)},\ldots,\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(m)}$ из $\boldsymbol{m}$ линейно независимых столбцов матрицы системы ограничений $\boldsymbol{A}$.

Матрица $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(1)},\ldots,\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(m)}]$ называется базисной.

Обозначения:

$$\boldsymbol{S}=\{\boldsymbol{\sigma}(1),\ldots,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{m})\},\boldsymbol{S}'=\{1,\ldots,\boldsymbol{n}\}\setminus\boldsymbol{S},\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}],$$

где $\boldsymbol{N}=[\boldsymbol{A}_j]_{j\in S'}$, $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_N)$, $\boldsymbol{x}_B=(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\sigma}(1)},\ldots,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\sigma}(m)})$ — базисные, а $\boldsymbol{x}_N=(\boldsymbol{x}_j)_{j\in S'}$ — небазисные переменные.

$$\boldsymbol{E}\,\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \qquad (6')$$

Определение 3. Решение $(\boldsymbol{x}_B,\boldsymbol{x}_N)=(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b},0)$ системы уравнений (6) назовем базисным (соответствующим базису $\boldsymbol{B}$).

ЛП: понятие б.д.р.

Лемма 3. **Вектор x — базисное решение системы (6) тогда и только тогда, когда множество столбцов с индексами из множества $S(x) = \{j | x_j \neq 0\}$ — линейно независимо.**

Определение 4. **Базисным допустимым решением (б.д.р.)** называется любой элемент множества Q, являющийся базисным решением системы уравнений (6).

Замечание 2. Решение соответствующее базису B — б.д.р. $\Longleftrightarrow$ $B^{-1}b \geq 0$.

Определение 5. Вектор $x \in Q$ — **крайняя точка или вершина** множества Q, если не существует допустимых решений $x^1 \neq x^2$ из Q таких, что $x = \alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2$, где $0 < \alpha < 1$.

ЛП: Критерий разрешимости

Теорема 3. **Вектор $\boldsymbol{x}$ — б.д.р. тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x}$ — крайняя точка множества $\boldsymbol{Q}$.**

Теорема 4 (Критерий разрешимости). **Задача линейного программирования (5)-(7) разрешима тогда и только тогда, когда множество допустимых решений не пусто и целевая функция ограничена на нем.**

Следствие 3. Если множество допустимых решений задачи ЛП не пусто, то существуют базисные допустимые решения.

Следствие 4. Если задача ЛП разрешима, то существует оптимальное базисное решение.

Симплекс-таблица (с.-т.)

$\boldsymbol{x}$ – допустимое решение задачи (5–7) со значением целевой функции $(\boldsymbol{c}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{w} \Leftrightarrow$ пара $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{x})$ – решение системы уравнений $(\mathbf{5}')$, $(\mathbf{6}')$, $(\mathbf{7})$ или системы

$$-\boldsymbol{w} + (\boldsymbol{c}_N - \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{x}_N = -\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{5'}$$

$$\boldsymbol{E}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}, \tag{6'}$$

$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$-w + \sum_{j \in S'} z_{0j} x_j = z_{00}, \qquad (5'')$$

$$x_{\sigma(i)} + \sum_{j \in S'} z_{ij} x_j = z_{i0}, \; i = \overline{1, m}, \qquad (6'')$$

где

$$z_{00} = -c_B B^{-1} b = -w(\overline{x}),$$

$$z_{0j} = c_j - c_B B^{-1} A_j, \; j = 1, \ldots, n,$$

$$(z_{10}, \ldots, z_{m0})^\top = B^{-1} b,$$

$$(z_{1j}, \ldots, z_{mj})^\top = B^{-1} A_j, \;\; j = 1, \ldots, n.$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$$
\begin{array}{c|c|cccccc|}
 & & x_1 & \dots & x_j & \dots & x_n \\
\hline
-w & z_{00} & z_{01} & \dots & z_{0j} & \dots & z_{0n} \\
\hline
x_{\sigma(1)} & z_{10} & z_{11} & \dots & z_{1j} & \dots & z_{1n} \\
. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{\sigma(i)} & z_{i0} & z_{i1} & \dots & z_{ij} & \dots & z_{in} \\
. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
x_{\sigma(m)} & z_{m0} & z_{m1} & \dots & z_{mj} & \dots & z_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

		x_1	$\dots$	x_i	$\dots$	x_m	x_{m+1}	$\dots$	x_n
$-w$	z_{00}	0	$\dots$	0	$\dots$	0	z_{0m+1}	$\dots$	z_{0n}
x_1	z_{10}	1	$\dots$	0	$\dots$	0	z_{1m+1}	$\dots$	z_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_i	z_{i0}	0	$\dots$	1	$\dots$	0	z_{im+1}	$\dots$	z_{in}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	z_{m0}	0	$\dots$	0	$\dots$	1	z_{mm+1}	$\dots$	z_{mn}

Симплекс-таблица (с.-т.)

Определение 6. Симплекс–таблица прямо допустима, если $z_{i0} \geq 0, \; i = 1, \ldots, m.$

Базис B, соответствующий ей, также называется прямо допустимым.

Определение 7. Симплекс–таблица двойственно допустима, если $z_{0j} \geq 0, \; j = 1, \ldots, n.$

Базис B, соответствующий этой таблице, также называется двойственно допустимым.

Элементарное преобразование б.д.р.

В базисе $\boldsymbol{B} = [\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(m)}]$ столбец $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(r)}$ заменяется на столбец $\boldsymbol{A}_{s}, s \in \{J \backslash \boldsymbol{\sigma}(1), \ldots, \boldsymbol{\sigma}(m)\}$. Если элемент $\boldsymbol{z}_{rs}$ не равен 0, $\boldsymbol{r} > \mathbf{0}$, то в результате получим новый базис:

$$[\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(r-1)}, \boldsymbol{A}_{s}, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(r+1)}, \ldots, \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{\sigma}(m)}].$$

Симплекс-таблица (с.-т.)

$\boldsymbol{\alpha'_i = (z'_{i0}, z'_{i1}, \ldots, z'_{in})}$ $\boldsymbol{(i = \overline{0, m})}$ строки новой симплекс– таблицы:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha'_i = \alpha_i - \dfrac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_r, \ i \neq r,} \\ \boldsymbol{\alpha'_r = \dfrac{1}{z_{rs}}\alpha_r.} \end{cases} \qquad \textbf{(11)}$$

$\boldsymbol{r}$-я строка, $\boldsymbol{s}$-й столбец и элемент $\boldsymbol{z_{rs}}$ называются ведущими.

Симплекс-таблица (с.-т.)

Соотношения (11) эквивалентны следующим

$$\begin{cases} z'_{ij} = z_{ij} - \dfrac{z_{is} z_{rj}}{z_{rs}}, \; i \neq r, \\ z'_{rj} = \dfrac{z_{rj}}{z_{rs}}. \end{cases}$$

Замечание 3. Элементарные преобразования сохраняют прямо допустимость с.-т.

Симплекс-метод

0) Построить симплекс–таблицу, соответствующую заданному базисному допустимому решению (таблица, естественно, будет прямо допустимой, т.е. $z_{i0} \geq 0, i = \overline{1, m}$).

1) Если симплекс–таблица двойственно допустима, т.е. $z_{0j} \geq 0,\ j = \overline{1, n}$, то КОНЕЦ (получено оптимальное решение)

2) Иначе, выбрать ведущий столбец $s : z_{0s} < 0,\ s \geq 1$.

Симплекс-метод

3) Если $\{i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{z_{r0}}{z_{rs}} = \min\{\frac{z_{i0}}{z_{is}} \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима из-за неограниченности целевой функции).

4) Преобразовать симплекс–таблицу, положить $\sigma(r) := s$ и перейти на шаг 1.

Лексикографический с. - м.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}'' \in \boldsymbol{R}^{n+1}$.

Вектор $\boldsymbol{\alpha}'$ лексикографически больше вектора $\boldsymbol{\alpha}''$ $(\boldsymbol{\alpha}' \succ \boldsymbol{\alpha}'') \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha}' - \boldsymbol{\alpha}'' \succ \mathbf{0}$.

Симплекс-таблица *нормальна*, если каждая ее строка $\boldsymbol{\alpha}_i$, $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \ldots, \boldsymbol{m}$ лексикографически больше нуля.

Лексикографический с. - м.

0) Начать с нормальной симплекс–таблицы.

3) Если $\{i \mid z_{is} < 0,\ i \geq 1\} \neq \emptyset$, то выбрать ведущую строку r по правилу:

$$\frac{1}{z_{rs}}\alpha_r = lex\min\{\frac{1}{z_{is}}\alpha_i \mid z_{is} > 0,\ i \geq 1\},$$

иначе КОНЕЦ (задача неразрешима).

Сохранение нормальности с.-т. на шаге 4:

1. $\boldsymbol{\alpha_r \succ 0}$, $\boldsymbol{z_{rs} > 0 \Rightarrow \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r \succ 0}$
2. $\boldsymbol{z_{is} \leq 0 \Rightarrow \alpha_i - \frac{z_{is}}{z_{rs}}\alpha_i \succeq \alpha_i \succ 0}$
3. $\boldsymbol{z_{rs} > 0 \Rightarrow z_{is}[\frac{1}{z_{is}}\alpha_i - \frac{1}{z_{rs}}\alpha_r] \succ 0}$.

Лекскографическое возрастание 0-й строки:

$\boldsymbol{z_{0s} < 0}$, $\boldsymbol{z_{rs} > 0}$ и $\boldsymbol{\alpha_r \succ 0}$, то

$$\boldsymbol{\alpha_0 - \frac{z_{0s}}{z_{rs}}\alpha_r \succ \alpha_0}.$$

Итак базисы не могут повторятся, следовательно, метод конечен.