0.0.1 Следствие 2

$f \notin L \quad \Rightarrow \quad xy \in [\{f, \overline{x}, 0, 1\}]$.

0.0.2 Лемма (о немотонной ф-ии)

$f(x_1...x_n) \notin M \Rightarrow$ подставляя на место переменнх 0,1,x можно получить $\overline{x}$.

Доказательство.
$f(x_1...x_n) \in M \quad \Rightarrow \quad \exists \alpha = (\alpha_1, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_n): \quad \alpha \leq \beta, \quad f(\alpha_1...\alpha_n) > f(\beta_1...\beta_n)$.
$\varphi(x)$ из $f(x_1...x_n)$ на x_i назовём: □

0.0.3 Следствие 3

$f \notin M \quad \Rightarrow \quad \overline{x} \in [\{f, 0, 1\}]$.

Доказательство. Док-во теоремы поста

$\Rightarrow$) Из теоремы 8.

$\Leftarrow$) $\Omega \not\subseteq T_0 \quad \Rightarrow \quad \exists f_0 \in \Omega \setminus T_0$
$\Omega \not\subseteq T_1 \quad \Rightarrow \quad \exists f_1 \in \Omega \setminus T_1$
$\Omega \not\subseteq L \quad \Rightarrow \quad \exists f_L \in \Omega \setminus L$
$\Omega \not\subseteq S \quad \Rightarrow \quad \exists f_S \in \Omega \setminus S$
$\Omega \not\subseteq M \quad \Rightarrow \quad \exists f_M \in \Omega \setminus M$
Докажем, что $\Omega' = \{f_0, f_1, f_L, f_S, f_M\}$ – полна.
По т. 4 и ????? $\{\&, \overline{x}\}$.

1. Получим отрицание и константы.
   $\varphi_0(x) = f_0(x_1...x)$, $\varphi_1(x) = f_1(x_1...x)$. $\varphi_0(0) = 1, \varphi_1(1) = 0$.
   1 случай: $\overline{x} \in \{\varphi_0, \varphi_1\}$. По лемме о немотонной ф-ии $0, 1 \in [\{f_s, \overline{x}\}]$.
   2 случай: $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = 0$. По лемме о немотонной ф-ии $\overline{x} \in [\{f_M, 0, 1\}]$. Т.о. $0, 1, \overline{x} \in [\Omega']$.
   По лемме о нелинейной ф-ии $xy \in [\{f_L, 0, 1, \overline{x}\}] \quad \Rightarrow \quad \overline{x}, xy \in [\Omega'] \quad \Rightarrow \quad \Omega'$ – полна.

□

0.0.4 Пример

$\{1, x \oplus y, m(x, y, z)\}$ – полня ли?

0.0.5 Следствие 4

Из любой полной системы булевых ф-ий можно выделить полную подсистему, состоящую не более, чем из 4 ф-ий.

Доказательство.
из док-ва теоремы Поста.
Ω' – полная.
1 случай. f_0 или f_1 – не монотонные.
2 случай. f_0 и f_1 – не самодвойственны. □

0.0.6 Упражнение

Док-ать, что уменьшить число низя (построить полную систему из 4 фу-й, никакая собственная подсистема которой не является полной).

0.0.7 Лемма 7

$\forall$ двух классов из $\{T_0, T_1, S, L, M\} \exists$ ф-ий, принадлежащая одному и не принадлежащая другому.

0.0.8 Лемма 8

Пусть $\Omega \subseteq P_2$, Ω – замкнут, $\Omega \neq P_2$.
Тогда Ω лежит в одном из классов T_0, T_1, L, S, M.

Доказательство. по т. Поста. □

0.0.9 Определение

Мно-во булевых ф-ий Ω называется предполным классом, если выполнены:

1. $\Omega \neq P_2$
2. Ω – замкнуто.
3. $\forall f \in P_2 \setminus \Omega$, $\Omega \cup \{f\}$ – полна.

0.0.10 Теорема 10

В P_2 существуют ровно 5 предполных классов: T_0, T_1, L, S, M.

Доказательство.
Рассмотрим, например, S. S – предполный, т.к. по т. 8, 9 выполнены 1 и 2. По лемме 7 $\exists f_0, f_1, f_L, f_M \in S$, которые не принадлежат соответствующим классам. $\forall f_S \notin S (f_s \in P_2 \setminus f_S) \quad S \cup \{f_s\}$ – полна по т. Поста. А значит, выполнено 3.
T_0, T_1, L, M – монотонные аналогично. Докажем, что нет других.
Пусть $\Omega \notin \{T_0, T_1, L, S, M\}, \quad \Omega \neq P_2, \quad \Omega$ – замкнуто $\quad \Rightarrow \quad \Omega$ лежит в одном из классов T_0, T_1, L, S, M.
Пусть $\Omega \subseteq L \quad \Rightarrow \quad \exists f \in L \setminus \Omega = \{f\} \cup \Omega \subseteq L \quad \Rightarrow \quad [\{f\} \cup \Omega \neq P_2$ не выполняется 3. □

0.1 Схема из функциональных элементов

Схема из функциональных элементов в базисе $\{\&, \vee, \neg\}$ – это помеченный ориентированный граф $G = (V, A)$ без контуров (ориентированных циклов), удовляеторяющий:

1. $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, $V_i \cap V_j = \varnothing, i \neq j$
2. $\forall v \in V_1 \quad \deg(v) = 0$ (полустепень захода)
3. $\forall v \in V_2 \quad \deg(v) = 1$ (полустепень захода)
4. $\forall v \in V_3 \quad \deg(v) = 2$ (полустепень захода)
5. $\forall v \in V_1$ предписана переменная (у разных вершин – разная).
6. $\forall v \in V_2$ предписан символ отрицания.
7. $\forall v \in V_3$ предписана одна из двух меток: & или $\vee$.
8. Выделено $V^* \subseteq V$.

Вершина из V_1 – **входы схемы**. Если $v \in V_1$ принимает x_i, то на вход v подаётся x_i. Вершинки из $V_2 \cup V_3$ – функциональные элементы, $v \in V_2$ – инвертор, $v \in V_3$, помеченный & – конъюнктор, $v \in V_3$, помеченный $\vee$ – дизъюнктор, $v \in V^*$ – выход.

Нумерация вершин рёберного орграфа – монотонна, если для любой дуги uv номер u меньше номера v.

0.1.1 Лемма 9

Любой конечный граф без контуров допускает монотонную нумерацию вершин.

Доказательство.
Рассмотрим L – самая длинная орцепь в G. Первая вершина v в L имеет $\deg(v) = 0$. v – номер 1, $G - v$ и т.д.
S – схема из функциональных элементов с n входами, на которые подаются $x_1 ... x_n$. Занумеруем монотонно все вершины схемы. Каждой вершине схемы в порядке возрастания номеров сопоставим некоторую булеву ф-ию по следующим правилам.
v_1 – вход, подаётся x_i – сопоставим x_1. Рассмотрим v_k:

1. $v_k \in V_1$, подаётся x_j – сопоставим x_j.
2. $v_k \in V_2 \quad \Rightarrow \quad$ в v_k входим вершшинка из $v_l \leftrightarrow f$. v_k сопоставим $\overline{f}$.
3. $v_k \in V_3$, тогда в v_k входят дву другие из $v_l \leftrightarrow f$ и $v_m \leftrightarrow g$. Если v_k – конъюнктор, то сопоставим $f \& g$, если дизъюнктор, то $f \vee g$.

□