0.1 Замкнутость и полноста систем булевых функций

0.1.1 Определения

Ω – система БФ.
$[\Omega]$ – все БФ, выраженные ф-лами над Ω.
Примеры:
$[\{\overline{x}, 0\}] = \{\overline{x}, 0, x, 1\}$
$[\{x\&y,\, x \vee y,\, \overline{x}\}] = P_2$.
Сво-ва:

1. $\Omega \subseteq [\Omega]$
2. $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \quad \rightarrow \quad [\Omega_1] \subseteq [\Omega_2]$
3. $[\Omega_1 \cup \Omega_2] \supseteq [\Omega_1] \cup [\Omega_2]$
4. $[[\Omega]] = [\Omega]$

Ω – **замкнутое**, если $\Omega = [\Omega]$.
Система БФ Ω называется **полной**, если $[\Omega] = P_2$.

0.1.2 Лемма 2

$\{x\&y,\, x \vee y,\, \overline{x}\}$ – полна.

Доказательство.
$f(x_1 \ldots x_n) \in P_2$
$\Rightarrow$ если $f \equiv 0$, то $f = x, \& \overline{x}$.
$\Rightarrow$ если $f \not\equiv 0$, то f представима в виде СДНФ. ☐

0.1.3 Теорема 4 (О полноте 2-ч систем

Ω_1, Ω_2 – системы БФ, Ω_1 – полна, каждая БФ в Ω_1 выражается формулой над Ω_2 (*) $\Rightarrow$ Ω_2 – полна.

Доказательство.
Ω_1 – полно $\Rightarrow$ $[\Omega_1] = P_2$.
(*) $\rightarrow \Omega_1 \subseteq [\Omega_2]$.
$P_2 = [\Omega_1] \subseteq [[\Omega_2]] = [\Omega_2] \subseteq P_2 \quad \Rightarrow \quad [\Omega_2] = P_2$. ☐

0.1.4 Теорема 5

Из любой полной системы БФ можно выделить конечную полную подсистему.

Доказательство.
Ω – полна. $\exists \Phi_{\&}$, $\Phi_{\vee}$, Φ_{-} – ф-лы над Ω выражающие $\&$, $\vee$, $-$.
В любой из них конечное число ф-ий из Ω.
Расс?? мо-во ☐

0.1.5 Лемма 3 (Прмеры полных систем)

Следующие системы полны: $\{\&, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\&, \oplus, 1\}$, $\{x \mid y\}$, $\{x \downarrow y\}$.

0.1.6 Определения

Ф-ла вида $x_{i_1} \& \ldots \& x_{i_k}$, где $x_{ji} \neq x_{jl}$, $i \neq l$ называется **монотонной элементарной конъюнкцией**, k – ранг.
1 – вырожденная МЭК, ранг(1)=0.

Ф-ла вида $k_1 \oplus \ldots \oplus k_l$, где k_i – МЭК, $k_m \neq k_n$, $m \neq n$, называется **полиномом Жегалкина**.
l – длина полинома. 0 – полином длины $l = 0$ выражающий ф-ию $\equiv 0$.

0.1.7 Теорема 6 (Жегалкина)

Для любой БФ $f \in P_2$ $\exists!$ полином Жегалкина, реализующий эту ф-ию.

Доказательство.

существование) По Лемме 3 $\{\&, \oplus, 1\}$ – полная. $\Rightarrow$ $f(x_1 \dots x_n) \in P_2$, то f выражается ф-лой над $\{\&, \oplus, 1\}$.
Преобразуем её:

1. Раскроим скобки по законам дистрибутивности $\oplus$ относительно $\&$. Получаем ф-лу $A_1 \oplus \dots \oplus A_m$, где A_i – ф-ла над $\{\&, 1\}$.
2. По законам $x\&x = x$, $x\&1 = x$ преобразуем все A_i в ЭМК.
3. По закону $A \oplus A = 0$ получаем полином Ж, который эквивалентен исходной ф-ле.

единственность) Кол-во БФ от n переменных $= 2^{2^n}$.
Кол-во МЭК от n переменных $x_1 \dots x_n = 2^n$.
$\Rightarrow$ ПЖ от n переменных $= 2^{2^n}$.
Каждый полином реализует единственную ф-ию $\Rightarrow$ для каждой ф-ии ПЖ – единственный.

□

0.1.8 3 способа построения ПЖ для ф-ии f

Введём нумерацию МЭК над мно-ом переменных $\{x_1 \dots x_n\}$.
$K \leftrightarrow$ набор $(\sigma_1 \dots \sigma_n) \mid \sigma_i = 1 \Leftrightarrow x_i$ входит в K.
Номер $K = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot 2^{n-1}$. Константа 1 имеет номер 0.

K	v	x_1	x_2
1	0	0	0
x_2	1	0	1
x_1	2	1	0
x_1x_2	3	1	1

0.1.9 Способ первый

$f(x_1 \dots x_n)$ представим в виде СДНФ или СКНФ. По законму Де Моргана изб-ся от $\vee$, все отрицания заменим на $\oplus 1$. Получим ф-лу над $\{\&, \oplus, 1\}$. Далее по алгоритму из док-ва.

Пример $f(xy) = x \to y = \overline{x} \vee y = \overline{x\&\overline{y}} = x\&(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus 1.$

0.1.10 Способ второй (метод неопределённых коэффициентов)

$P(x_1 \dots x_n)$ – ПФ для $f(x_1 \dots x_n)$.
$P(x_1 \dots x_n) = C_0 \oplus C_1K_1 \oplus C_2K_2 \oplus \dots \oplus C_{2^n-1}K_{2^n-1}$, где K_i – ЭМК с номером i, $C_i \in \{0,1\}$.
$(C_0 \dots C_{2^n-1}$ – набор коэффициентов в ПЖ.
$\forall \widetilde{\alpha} \in \{0,1\}^n$ сопоставим ур-ие $P(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$. Это система из 2^n ур-ий и 2^n неизвестных. По т. Жегалкина она имеет единственно решение.

Пример $x \to y = C_0 \oplus C_1y \oplus C_2x \oplus C_3xy$.

$$\begin{cases} f(0,0) = 1 = C_0 \\ f(0,1) = 1 = C_0 \oplus C_1 \\ f(1,0) = 0 = C_0 \oplus C_2 \\ f(1,1) = 1 = C_0 \oplus C_1 \oplus C_2 \oplus C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_0 = 1 \\ C_1 = 0 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow x \to y = 1 \oplus x \oplus xy$$

0.1.11 Способ третий (преобразование кортежа значений ф-ии)

$\widetilde{\alpha_f} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1}) \quad \Rightarrow \quad (C_0, C_1, \ldots, C_{2^n-1}) = \widetilde{C_f}$.
Если $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1 \ldots \beta_n)$, то $\widetilde{\alpha} + \widetilde{\beta} = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \ldots, \alpha_n \oplus \beta_n)$.
$\widetilde{\alpha_f} = (\alpha_0 ... \alpha_{2^n-1})$ – кортеж значений ф-ии $f(x_1 ... x_n)$.
$\alpha_i = f(\sigma_1 ... \sigma_n)$, где $(\sigma_1 ... \sigma_n) \mid i = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k \cdot 2^{n-k}$.
Преобразованиями в $\widetilde{C_f}$ иднукцией по n:
$n = 1$. $\widetilde{\alpha_f} = (\alpha_0 \alpha_1) \Rightarrow \widetilde{C_f} = (\alpha_0, \alpha_0 + \alpha + 1)$
$n \to n+1 \quad f(y, x_1, ..., x_n):$
$f_0(x_1 ... x_n) := f(0, x_1 ... x_n)$
$f_1(x_1 ... x_n) := f(1, x_1 ... x_n)$
$\widetilde{C_{f_0}}$ и $\widetilde{C_{f_1}}$ – известны по предположению индукции, тогда $\widetilde{C_f} = (\widetilde{C_{f_0}} \mid \widetilde{C_{f_0}} \oplus \widetilde{C_{f_1}})$.

0.1.12 Теорема 7

$\widetilde{C_f}$ – в-р коэффициентов в ПЖ для f.

Доказательство. Индукция по n:
$n = 1 \quad f(x) = C_0 + C_1 x$
$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \alpha_0 = C_0 \\ f(1) = \alpha_1 = C_0 + C_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_0 = \alpha_0 \\ C_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \end{array}\right. \quad n \to n+1:$$
$\widetilde{C_{f_0}}$ и $\widetilde{C_{f_1}}$ – в-ры к-тов ПЖ функций f_0 и f_1.
$f(y, x_1 ... x_n) =$ (это равенство надо ещё доказать!!!) $= \overline{y} f(0, x_1 ... x_n) \oplus y f(1, x_1 ... x_n) = f_0(x_1 ... x_n)$. $\square$