1 Булевы ф-ии

1.0.1 Определение

$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ – **булева функция**. P_2 – мно-во всех таких ф-ий.
Таблица значений – один из способов заданий таких ф-ий.

x_1	$\dots$	x_n	$f(x_1 \dots x_n)$
0	$\dots$	0	$f(0,0,\dots,0)$
0	$\dots$	1	$f(0,0,\dots,1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$\dots$	1	$f(1,1,\dots,1)$

1.0.2 Лемма 1

Булевых ф-ий от n переменных 2^{2^n}.

1.1 Элементарные булевы ф-ии

x	0	x	$\overline{x}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Наши ф-ии:

x	y	$x \& y$	$x \vee y$	$x \sim y$	$x \to y$	$x \oplus y$	$x \mid y$	$x \downarrow y$
0	0	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0	0	0

Наша ф-ия от 3 переменных:

x	y	z	$m(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Перем. x_i ф-ии $f(x_1 \dots x_n)$ **- существенная**, если $\exists \alpha_1 \dots \alpha_n \quad f(\alpha_1 \dots \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n) \neq f(\alpha_1 \dots \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n)$.
f **существенно зависит** от x_i. Если x_i – не существенно $\to$ x_i – фиктивная, f не зависит от x_i.

1.1.1 Теорема 1

Число булевых ф-ий $f(x_1 \dots x_n)$, существенно зависящих от $x_1 \dots x_n$ равно $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dbinom{n}{k}2^{2^{n-k}}$

Доказательство.

Формула включений-исключений: $|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot S_k, \quad S_k = \sum\limits_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}|$.
A_i – формулы, существенно не зависящие от переменной x_i.
$|A| = 2^{2^n}$, $|S_0| = |A| = 2^{2^n}$.
$|A_i| = 2^{2^{n-1}}$, $|S_1| = n \cdot 2^{2^{n-1}}$.
$|A_i \cap A_j| = 2^{2^{n-2}}$, $|S_2| = \binom{n}{2} \cdot 2^{2^{n-2}}$.
$\vdots$
$|S_k| = \binom{n}{k} \cdot 2^{2^{n-k}}$.
$\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\dbinom{n}{k}2^{2^{n-k}}$. $\square$

1.1.2 Определене

$f(x_1 \ldots x_n)$, x_i – фиктивная. Вычеркнем из таблицы значений строки вида $\sigma_1 \ldots \sigma_{i-1}, 1, \sigma_{i+1} \ldots \sigma_n$ и столбец i. Получим ф-ию от $n-1$ переменной $g(x_1 \ldots x_{i-1}, x_{i+1} \ldots x_n)$.
g полученна из f удалением фиктивной переменной, а f получена из g путём добавления фиктивной переменной.
Ф-ии равный, если одну из другой можно получить путём добавления или удаления фиктивных перменных.

x_1	x_2	$h(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

равна ф-ии

x_2	$g(x_2)$
0	0
1	1

1.1.3 Определение

Пусть дано $\Omega = \{f_1(x_1 \ldots x_{n_1}), \ldots, f_s(x_1 \ldots x_{n_s}), \ldots\}$. Формула над Ω:

1. $\forall i \quad f_i(x_1 \ldots x_{n_i})$ – формула.
2. Если $A_1 \ldots A_{n_i}$ – формулы на Ω или перменные, то $f_i(A_1, \ldots, A_{n_i})$ – формула над Ω.

1.1.4 Примеры

1. $\Omega = \{\varphi(x_1, x_2)\}$.
   Формулами будут: $\varphi(x_1, x_2), \quad \varphi(x_1, x_1), \quad \varphi(x_2, \varphi(x_3, x_4))$
2. $\Omega = \{x_1 \& x_2, \quad x_1 \vee x_2, \quad x_1 \oplus x_2\}$
   Формулой будет: $(x_1 \vee ((x_1 \& x_2) \oplus x_3)$

1.1.5 Определение

$\Phi(x_1 \ldots x_n) \to f(x_1 \ldots x_n)$

1. Если $\Phi(x_1 \ldots x_n)$ совпадает с некоторой $f_i(x_1 \ldots x_{n_i})$, $f_i \in \Omega \quad f(x_1 \ldots x_n) = f_i(x_1 \ldots x_{n_i})$
2. Если $\Phi(x_1 \ldots x_n)$ совпадает с $f_i(A_1 \ldots A_n)$, где $f_i \in \Omega$, $A_1 \ldots A_{n_i}$ – формулы или переменные, то если A_j – переменная x_{j_i}, то сопоставим $A_j \to f_{j_i} = x_{j_i}$. Если A_j – формула, то ей уже сопоставлена некоторая ф-ия f_{j_i}.
   Сопоставим $\Phi(x_1 \ldots x_n) \to f_j(f_{1_i} \ldots f_{n_i})$.
   Φ **реализует** ф-ию f. Φ_1 и Φ_2 **эквивалентны**, если они реализуют равные ф-ии.

1.1.6 Основные эквивалентности формулы

$\Omega = \{x_1 \& x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \oplus x_2,\ \overline{x},\ x,\ 0,\ 1\}$.
$\circ \in \{\&, \vee, \oplus\}$.

1. Коммутативность $\&, \vee, \oplus$: $(x_1 \circ x_2) = (x_2 \circ x_1)$.
2. Ассоциативность $\&, \vee, \oplus$: $(x_1 o (x_2 o x_3)) = ((x_1 o x_2) o x_3)$.
3. Дистрибутивность $\&, \vee, \oplus$: $(x_1 \vee (x_2 \& x_3)) = ((x_1 \& x_2) \vee (x_1 \& x_3))$
   $(x_1 \& (x_2 \vee x_3)) = ((x_1 \vee x_2) \& (x_1 \vee x_3))$ $(x_1 \oplus (x_2 \& x_3)) = ((x_1 \& x_2) \oplus (x_1 \& x_3))$
4. $\overline{\overline{x}} = x$
5. $\overline{x_1 \& x_2} = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2})$
   $\overline{x_1 \vee x_2} = (\overline{x_1} \& \overline{x_2})$
6. $(x_1 \& (x_1 \vee x_2)) = x_1$
   $(x_1 \vee (x_1 \& x_2)) = x_1$
7. $(x \& x) = x \quad (x \vee x) = x$.

8. $(x\&\overline{x}) = 0$

9. $(x \vee \overline{x}) = 1$

10. $(x\&0) = 0 \quad (x\&1) = x \quad (x \vee 1) = 1 \quad (x \vee 0) = x.$

11. $(x \oplus \overline{x}) = 1 \quad (x \oplus 1) = \overline{x} \quad (x \oplus x) = 0 \quad (x \oplus 0) = x$

1.1.7 Соглашения

1. Опускаем внешние скобки.

2. $A_1 \circ \ldots \circ A_n$ опускаем скобки.

3. $\&_{i=1}^n A_i = A_1 \& \ldots \& A_n$
   $V_{i=1}^n A_n = A_1 \vee \ldots A_n.$
   аналогично для прямой суммы: $\bigoplus$

4. $x_1 \& x_2 = x_1 \cdot x_2 = x_1 x_2$

5. & имеет приоритет перед $\vee$, $\oplus$, $\sim$, $\rightarrow$.

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1 \\ \overline{x}, & \sigma = 0 \end{cases}$$

$x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n} = 1 \Leftrightarrow (x_1 \ldots x_n) = (\sigma_1 \ldots \sigma_n).$

1.1.8 Теорема 2 (о разложении булевой ф-ии по перменным

Пусть $f(x_1 \ldots x_n) \in P_2, \quad k,\, 1 \leq k \leq n.$
Тогда $f(x_1 \ldots x_n) = \bigvee_{\sigma_1 \ldots \sigma_n \in \{0,1\}^k} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n} = f(\sigma_1, \ldots \sigma_k, x_{n-k+1}, \ldots, x_n).$

Доказательство.
$f(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$ – слева. А справа:
$\bigvee_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} \alpha_1^{\sigma_1} \ldots \alpha_k^{\sigma_k} f(\sigma_1, \ldots \sigma_k, x_{n-k+1}, \ldots, x_n) = f(\alpha_1 \ldots \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$. Рассмотрим пару крайних случаев:

$k = 1 \;\; f(x_1 \ldots x_n) = x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee \overline{x_1}(0, x_2, \ldots, x_n)$

$k = n \;\; f(x_1 \ldots x_n) = \bigvee_{\sigma_1 \ldots \sigma_n} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1 \ldots \sigma_n) = \bigvee_{\sigma_1 \ldots \sigma_n f(\sigma_1 \ldots \sigma_n) = 1} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n}.$ (*)
Разложение в виде (*) любой отличной от 0 ф-ии называется СДНФ (совершенная дизъюнктивная нормальная форма).

□

1.1.9 Определение

$f^*(x_1 \ldots x_n) = \overline{f(\overline{x_1} \ldots \overline{x_n})}$ – двойственная к f. $(f^*)^* = f$.

1.1.10 Теорема 3 (принцип двойственности)

Пусть $F(x_1 \ldots x_n) = f(f_1(x_1 \ldots x_n), \ldots, f_s(x_1 \ldots x_n)).$
Тогда $F^*(x_1 \ldots x_n) = f^*(f_1^*(x_1 \ldots x_n), \ldots, f_s^*(x_1 \ldots x_n))$

Доказательство.
$F * (x_1 \ldots x_n) = \overline{F(\overline{x_1} \ldots \overline{x_n})} = \overline{f(f_1(\overline{x_1} \ldots \overline{x_n}), \ldots f_s(\overline{x_1} \ldots \overline{x_n}))} = \overline{f}(\overline{f_1}*(x_1 \ldots x_n) \ldots$ □

1.1.11 Принцип двойственности для формул

Пусть f выражается формулой A над Ω. Тогда f^* выражается формулой A^* над Ω^*, где A^* получается из A заменой всех ф-ий из Ω двойственными ф-ями Ω^*.

1.1.12 Пример

$f = x_1 x_2 \oplus (\overline{x_1} \vee x_3)$
$f* = (x_1 \vee x_2) \sim \overline{x_1} x_3$

1.1.13 Определения

Формула вида $x_{i_1}^{\sigma_1} \dots x_{i_k}^{\sigma_k}$ называется элементарнй конъюнкцией ($x_{i_j} \neq x_{i_l}$, $j \neq l$).
$K_1 \vee K_2 \dots \vee K_s$, где K_i – элементарная конъюнкция - ДНФ. аналогично для КНФ.