Лекции по дискретке

Третий семестр

0.1 Раскраски

0.1.1 Определение

$G = (V, E)$. $\{c_1, ..., c_t\}$ – краски.
$\varphi : VG \to \{c_1, ..., c_t\}$ – **раскраска**.
t – раскраска. $V = V_1 \cup ... \cup V_t$ – разбиения.
t-раскраска φ – **правильная**, если $vu \in EG \Rightarrow \varphi(v) \neq \varphi(u)$.
φ – правильная t-раскраска.
G – **t-раскрашиваем**, если он обладает правильной t-раскраской.
G – **t-хроматический**, если G t-раскр. и не является $(t-1)$ - раскр. $X(G)$ – **хроматическое число** графа G.

0.1.2 Лемма 35

Если граф t-раскр., то он $(t+1)$-раскрашиваем.

0.1.3 Лемма 36

Если граф t-раскр., то каждый его подграф t-раскр.

0.1.4 Лемма 37

Для каждого подграфа G' графа G : $\quad X(G') \leq X(G)$.

0.1.5 Лемма 38

Если в графе G есть клика (полный подграф) на n вершинах, то $X(G) \geq n$.

0.1.6 Лемма 39

$X(G) = 1 \Leftrightarrow G$ – пустой.

0.1.7 Лемма 40

$X(G) = 2 \Leftrightarrow G$ – двудольный непустой.

0.1.8 Лемма 41

Пусть G состоит из блоков $B_1, ..., B_s$, тогда G – t-раскрашиваем $\Leftrightarrow B_i$ – t-раскр.

Доказательство.

$\Rightarrow$) Лемма 36

$\Leftarrow$) Индукция по числу блоков. База: $S = 1$ – очевидно. Рассмотрим висячий блок B. Пусть G' – подграф, порождённый остальными блоками. По индукционному предположению B и G' являются t-раскр.
$B \cap G' = \{v\}$. Раскр. B и G' в t цветов, чтобы v – один цвет.

$\square$

0.1.9 Лемма 42

$X(G) \le \triangle(G) + 1$ ($\triangle(G)$ – максимальная степень графа G).

Доказательство.
Индукция по кол-ву вершин графа G:
G – граф порядка $n \ge 2, \quad v \in VG$.
$G' = G - v$. По индукционному предположению $X(G') \le \triangle(G) + 1$.
$\deg(v) \le \triangle(G) \quad \Rightarrow \quad$ в окр. v не использовали какой-то цвет, окрасим её в этот цвет $\quad \Rightarrow \quad X(G) \le \triangle(G) + 1$.
□

$\triangle(K_n) = n - 1 \quad X(K_n) = n$
$\triangle(C_{2k+1}) = 2 \quad X(C_{2k+1}) = 3$

0.1.10 Теорема 38 (Брукс, 1941)

Пусть G – связный граф, не являющийся ни полным, ни циклом нечётной длины.
Тогда $X(G) \le \triangle(G)$.

0.1.11 Алгоритм последовательной раскраски

1. Упорядочим $v_1, ..., v_n$ – все вершины графа G.
2. $\varphi(v_1) = c_1$
3. $r = 2, \dots, n: \quad v_1...v_r$ – раскрашены. Берём $\varphi(v_{r+1}) = c_m$, где m – минимальный индекс цвета, которого нету в окружении вершинки v_{r+1}.

0.1.12 Лемма 43

Пусть G – двусвязный, не является ни полным, ни циклом. Тогда существует 2 вершины $u, v \in VG, \quad d(v, u) = 2$, $G - u - v$ - связный.

Доказательство.
a – доминирующая вершина, если $\deg(a) = |V| - 1$.
D – мно-во всех доминирующих вершин графа G.

1. $D \ne \varnothing$. G – не полный $\Rightarrow \quad VG \setminus D \ne \varnothing$.
   Пусть $u, v \in VG: \quad uv \notin EG \quad \Rightarrow \quad d(u, v) = 2 \Rightarrow G - u - v$ – связен.
2. $D = \varnothing$. По условию G – не цикл $\quad \Rightarrow \quad$ в $G\, \exists z : \deg(z) \ge 3$.
   Рассмотрим граф $G - z = G'$.
   (a) G' – двусвязный. Т.к. $D = \varnothing \quad \Rightarrow \quad \exists v : d(v, z) = 2$. Полагаем $u = z$. v, u – искомые.
   (b) G' имеет точки сочленения. $\quad \Rightarrow \quad$ существует два висячих блока B_1 и B_2.
   $\exists u \in B_1$: не точка сочленения и смежная с z в G, иначе т. сочленения блока B_1 явл. т. сочленения.

□

0.1.13 Лемма 44

Пусть G – связный, n-вершинный граф. $w \in VG$.
Тогда вершины графа G можно упорядочить так, чтобы $w_1, w, w_2, ..., w_n$, что любая вершинка w_i, $i \ge 2$ смежна по крайней мере с одной вершиной с меньшим номером.

Доказательство т. Брусса.

1. G - двусвязный, без циклов, $|V| = n$. По л. 43 $\exists u, v : \quad d(u, v) = 2 \quad G - u - v$ – связный.
   $\Rightarrow \quad \exists w : \quad u???, wv \in EG$.
   По лемме 44 вершины графа $G - u - v$ можно упорядочить так, что $w, ..w_{n-1}$
   $\forall i, 2 \le i \le n - 2, \quad w_i$ смежна с вершиной с меньшим номером.
   Упорядочим вершины графа G: $u, v, w_{n-2}, ..., w_1 = w$ и применим алгоритм последовательной раскраски.
   $\varphi(u) = \varphi(v) = c_1$.
   Пусть уже покрашены $u, v, w_{n-2}...w_{s+1}$ в $\triangle(G)$ цветов.
   w_s смежна с вершиной с меньшим номером - не покрашеные вершины $\quad \Rightarrow \quad$ в окружении w_s используется не более $\Delta(G)$ цветов $\quad \Rightarrow \quad$ покрасим её в один из $\Delta(G)$ цветов.
   ... в окружении w использовано меньше, чем $\Delta(G)$ цветов.

2. Пусть $\Delta = \Delta(G)$, G – не связен. Покажем, что любой блок графа G является Δ-раскрашиваем.
   (a) Блок является $K_m \Rightarrow$ точка сочленеия этого блока имеет степень не меньше $m \leq \Delta$. Но K_m – m-раскрашиваем $\Rightarrow$ он является Δ-раскрашиваем.
   (b) Блок явлется циклом. Точка сочленеия этого блока имеет степень не меньше 3. Цикл 3-раскрашиваем $\Rightarrow$ Δ-раскрашиваем.
   (c) Блок не полный и не цикл $\Rightarrow$ по доказанному.

□

0.1.14 Теорема 39 (Зыкова, 1949)

Существуют графы без треугольников с произвольно большим хроматическим числом.

0.1.15 Лемма 45

Любой минимальной, правильной раскраске графа G для любого цвета c_i существуют вершины этого цвета, смежные с вершинами всех остальных цветов.

Доказательство т. Зыкова.
Построим последовательность графов $G_2 ... G_i ...$, так, что:

1. G_i без треугольников.
2. $X(G_i) = i$

$G_2 = K_2$
Пусть G_i построено, давайте построим $VG_i = \{v_1 ... v_n\}$. Построим G_{i+1}:
$VG_{i+1} = VG_i \cup V' \cup \{v\}$, где $V' = \{v'_1, ..., v'_n\}$, $\quad VG_i \cap V' = \varnothing$.
$V \notin VG_i \cup V'$.
Определяем мно-во рёбер: на вершинках VG_i строим граф G_i.
Любую вершинку $v'_i \in V'$ соединяем со всеми вершинами из VG_i, смежными с v_i. v смежна со всеми вершинами из V. Имеем: G_i – без тре-ов и $X(G_i) = i$. Докажем, что G_{i+1} без треугольников.
Пусть в G_{i+1} есть треугольник. Тогда $a, b, c :\ a, b \in VG_i, c \in V'$ (единственный вариант, который остался). Но $c = v'_j \Rightarrow a, b, v$ – треугольник. Противоречие.
Рассмотрим теперь хроматическое число.
G_{i+1} в $i+1$. G_i – i - раскр. φ, φ' графа G_{i+1} : $\quad \forall$ верш. из $V'G$.
Почему нельзя меньше? Пусть G_{i+1} правильно раскрашен в i цветов. Но $X(G_i) = i \Rightarrow$ эта раскраска порождает правильную минимальную раскраску графа G_i. Тогда по лемме 45 есть вершина, смежная с вершинами всех остальных цветов, тогда её дупликат расрашен в тот же цвет, следовательно в V' существуют вершины всех цветов, а значит для вершины v? нет цвета.
Следовательно, $X(G_{i+1}) = i + 1$. □