Лекции по дискретке

Третий семестр

0.1 раскраска и планарность графов

Карта – связный плоский мультиграф без мостов.
Грани карты имеющие общее ребро - смежны.
t – раскраска карты, φ – мно-во граней в $\{c_1, ..., c_t\}$, $\forall$ две сменжные грани имеют разный цвет.

0.1.1 Гипотеза (о чётырех красках КЭли, 1879)

Всякая карта 4-раскрашиваема.

0.1.2 Теорема 40

Карта G – t-раскрашиваема $\Leftrightarrow$ геом. двойственный граф $G*$ t-раскр.

0.1.3 Теорема 41

Плоский двусвязный граф имеет хроматическое число 2 (бихромотический) $\quad\Leftrightarrow\quad$ границы каждой его граней имеет чётное число рёбер.

Доказательство.

$\Rightarrow$ очевидно.

$\Leftarrow$ Рассмотрим произвольный простой цикл C. Внутри цикла грани $T_1, ..., T_s$, на границе T_i лежит l_i рёбер $\forall i$. Все l_i – чётные, значит $\sum\limits_{i=1}^{s} l_i$ – чётное число. Все рёбра, не принадлжащие C в этой сумме подсчитаны дважды, следовательно C - чётной длины. $\Rightarrow$ любой цикл имеет чётную длину $\quad\Rightarrow\quad$ G – двудольный по теореме 2 $\quad\Rightarrow\quad$ по лемме 40 – бихромотический.

□

0.1.4 Теорема 42

Карта G – 2-раскрашиваемый $\quad\Leftrightarrow\quad$ G – Эйлеров.

0.1.5 Лемма 46

Пусть вершины графа G ?? цветами $c_1...c_t$. Обозначим через G_{ij} подрграф графа G, порождённый всеми вершинами цветов c_i и c_j, $i \neq j$, $i, j \in \{1..t\}$. Пусть G'_{ij} – нек. ?? связный графа G_{ij}.

Вершины графа G'_{ij} перекрасим $c_i \leftrightarrow c_j$. Полученная раскраска – правильная раскраска G в цвета $c_1....c_t$.

Доказательство.
Пусть $u, f \in \{c_i, c_j\}$, Пусть u и v – раскраска в c_i.

1. $u, v \in VG'_{ij}$, $\Rightarrow$ в старой раскраске u, v имеют цвет c_j $\Rightarrow$ не смежны.
2. $u, v \notin VG'_{ij}$, $\Rightarrow$ в старой раскраске u, v имеют цвет c_i $\Rightarrow$ не смежны.
3. $u \in VG'_{ij}$, $v \notin VG'_{ij}$ $\quad\Rightarrow\quad$ u, v в разных компонентах связности графа G_{ij} $\Rightarrow$ не смежны.
4. $u \in VG'_{ij}$, $v \notin VG'_{ij}$ $\quad\Rightarrow\quad$ u, v в разных компонентах связности графа G_{ij} $\Rightarrow$ не смежны.

□

0.1.6 Теорема 43

Любой планарный граф 5-раскрашиваем.

Доказательство.
Индукция по числу вершин. $n = |VG|$.
$n \leq 5$ – база индукции, ибо всё очевидно.
Рассмотрим произвольный граф, $n \geq 6$.
По следствию 14 в графе $G \quad \exists v : \quad \deg(v) \leq 5$. Рассмотрим $G' = G - v$. По индукционому предположению существует правильаня 5-раскраска φG'. $\square$