0.0.1 Теорема 49 (Визин?)

$\forall G \triangle(G) \leq X'(G) \leq \triangle(G)+1$.
Правильная рёберна $\triangle(G)+1$-раскраска отныне будет называться просто “раскраска”.

Доказательство.
От противного. Пусть G – граф с минимальным числом рёбер, не удовлетворяющих верхне оценке.
K_2 – удовлетворяет. И что?
$\forall e \in EG \quad G-e$-раскрашиваем. С другой стороны, G – не раскрашиваем.
$\forall xy \in EG \quad \forall$ раскраски графа $G-xy$, если α нет в x, β нет в y, то $\alpha \neq \beta$ (иначе можно было бы раскарить x и y в один(?) цвет) и $\alpha \setminus \beta$ цепь из x заканчивается в y. Это наше сво-во (*).
$x \in VG \quad xy_0 \in EG$, тогда $G-xy_0$ имеет φ_0-раскраску.
Пусть в x нет α, в y_0 нет $\beta_0 \quad \Rightarrow \quad$ в x есть $\beta_0 \quad \Rightarrow \quad \exists xy_1 \in EG: \quad \varphi_0(xy_1)=\beta_0$.
В y_1 нет β_1, если /*в x есть β_1*/ ребро $xy_2: \quad \varphi_0(xy)=\beta$ и т.д. до y_k.
Строим серию раскрасок.
$\forall G_i = G - xy_i$ строим раскраску из $\varphi_i: \varphi_i(e)=\varphi_0(xy_{j+1})$, $e=xy_j$, $j \in \{0,...,i-1\}$.
кратииииинки
В φ_0 цвет β_k есть в $x \quad \Rightarrow \quad \beta_k \in \{\beta_0,...,\beta_{k-1}\}$. $\exists i\, \beta_k=\beta_i\; i \in \{0,...,k-1\}$.

□

0.0.2 Теорема 50

Справедливо $X'(K_{2n+1})=2n+1$, $X'(K_{2n})=2n-1$.

Доказательство. Упражнение. □

0.0.3 Определения

Граф называется ???, если все рёбра раскрашены в один цвет. Для любых 6 человек существует 3, которые попарно знакомы между собой, лио 3, которые попарно не знакомы.

Доказательство. Возьмём K_6 и раскрасим рёбра в 2 цвета: $\varphi(xy)=c_1$, если знакомы и c_2, если не знакомы. Доказать, что есть одноцветный тре-к. □

0.0.4 Теорема 51 (Рамсея для графов)

$\forall p,q \quad p \geq 2,\, q \geq 2 \quad \exists$ минимальное число $N(p,q): \quad \forall n \geq N(p,q)$, $\forall$ раскраси ребёр графа K_n в два цвета c_1 и c_2 выполнено хотя бы одно из двух условий:

1. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на p вершинах.
2. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_2 на q вершинах.

$N(p,q)$ – **число Рамсея** для графов.

0.0.5 Лемма 48

$\forall p,q \geq 2$ верны:

1. $N(2,q)=q$
2. $N(p,2)=p$
3. $N(3,3)=6$.

Доказательство.
1, 2 – упражнение.
3. Докажем (1) $N(3,3)>5$ и (2) $N(3,3)\leq 6$.

1. привести пример раскраси ребёр K_5, где нет монохроматических тре-ков.
2. рассмотрим произвольную раскраску ребёр графа K_6, $x \in VK_6$.
   Есть 3 ребра, инцидентных x и раскрашенных в один цвет.

□

Доказательство (Теорема Рамсея).
Индукция по $m = p + q$. Докажем неравенство $N(p,q) \leq N(p-1,q) + N(p,q-1), \quad \forall p > 2,\ q > 2$. Сама индукция доказывает граничность числа $N(p,q)$.
База индукции: $N(p,2) = p, \quad N(2,q) = q$ (лемма 48).
$n = N(p-1,q) + N(p,q-1)$. Надо доказать, что для K_n выполнено условие теореым.
Пусть φ – произвольная раскраса рёбра графа K_n в два цвета c_1 и c_2.
$x \in VK_n$. $V_1 = \{y \in VK_n | \varphi(xy) = c_1\}, \quad V_2 = \{y \in VK_n | \varphi(xy) = c_2\}$. $|V_1| = n_1, \quad |V_2| = n_2$.
$n_1 + n_2 + 1 = n = N(p-1,q) + N(p,q-1)$ (возможно, числа чётные?) $\quad \Rightarrow \quad$ выполнено одно из условий:

1. $n_1 \geq N(p-1,q)$
2. $n_2 \geq N(p,q-1)$

Пусть (1). Рёбра графа $G(V_1)$ раскрашены раскраской φ. По индукционному предположению выполнено хотя бы одно из условий:

1. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на $p-1$ вершине.
2. $\exists$ монохроматический порождённый подграф цвета c_2 на q вершинах.

Если выполняется второе, то всё доказано. А если первое???
Если первое, то добавим вершину x и получим монохроматический порождённый подграф цвета c_1 на p вершинах. Иными словами, док-во чем-то похоже на док-во предыдущей леммы.
Случай (2) рассматривается аналогично. □

0.0.6 Теорема 52

Если для $p, q\,(p > 2, q > 2) \quad N(p-1,q)$ и $N(p,q-1)$ – чётные, то $N(p,q) < N(p-1,q) + N(p,q)$.