1 Графы (второй семестр)

1.1 Двойственность

???

1.1.1 Лемма 31

Для любого плоского псевдографа G граф G^* – связен.

Доказательство. Упражнение. □

1.1.2 Лемма 32

G – плоский связный (n, m)-граф с f гранями, то G^* – (n^*, m^*)-граф с f^* гранями, где $n^* = f$, $m^* = m$, $f^* = n$.

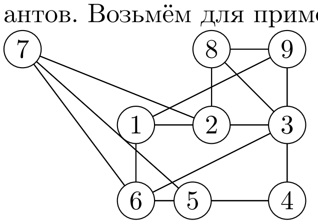
Доказательство. Упражнение. □

1.1.3 Теорема 36

Если G – плоский связный псевдограф, то граф G^{**} изоморфен графу G.

1.1.4 Алгоритм укладки графа на плоскость

На каждом шаге укладка цепи и образование новой грани. Работает только для двусвязных графов, без вариантов. Возьмём для примера граф:



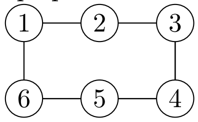
Сегмент S относительно графа $\tilde{G}$ – подграф графа G одного из видов:

1. ребро $e = uv \in EG: \quad e \notin \tilde{G}, \quad u, v \in V\tilde{G}$
2. каждая компонента связности графа $G - \tilde{G}$, дополненная всеми рёбрами, связывающими $\tilde{G}$ с этой компонентой.

Если G – планарен, следовательно каждый сегмент планарен.
Вершины сегмента S относительно $\tilde{G}$, принадлежащие $\tilde{G}$ – **контактные** вершины.
G – двусвязный, следовательно каждый сегмент имеет не менее двух контактных вершин.
У $\tilde{G}$ есть грани. Допустимой гранью для сегмента S относительно $\tilde{G}$ называется грань Γ графа $\tilde{G}$, содержащая все контактные вершины графа S. Мно-во всех допустимых граней для S: $\Gamma(S)$.
Простую цепь сегмента S, соединяющую две различные контактные вершины и не содержащую других контактных вершин называют **α-цепь**.

1.1.5 Собственно, сам алгоритм

шаг 0. В G выбираем простой цикл C и укладываем на плоскость $\tilde{G} = C$. Напр., для приведённого выше графа:



шаг 1. Берём все грани и сегменты относительно $\tilde{G}$. Если мно-во сегментов пусто, переходим к 7.

шаг 2. Для каждого сегмента S определим $\Gamma(S)$:

3 Если $\exists S: \quad \Gamma(S) = \varnothing \Rightarrow G$ – не планарный. Идём к шагу 4.

4 Если $\exists S: \quad |\Gamma(S)| = 1 \Rightarrow$ шаг 6. Иначе 5.

5 Для некоторого сегмента S выбираем произвольную допустимую грань Γ.

6 Помещаем α-цепь $L \in S$ в грань $\Gamma\tilde{G}$ на $\tilde{G} \cup L$. К шагу 1.

7 Построена укладка $\tilde{G}$ – укладка G.

1.1.6 Ообоснование?

Два сегмента S_1 и S_2 называются **конфликтующими**, если:

1. $\Theta = \mathit{\Gamma}(S_1) \cap \mathit{\Gamma}(S_2) \neq \varnothing$.
2. Существуют 2 α-цепи $L_1 \in S_1$ и $L_2 \in S_2$. Нельзя одновременно уложить ни в какую грань $\mathit{\Gamma} \in \Theta$.

Пример конфликтующих сегментов: 3 — 6   5 — 1

1.1.7 Лемма 33

Если S_1 и S_2 конфликтуют, $|\mathit{\Gamma}(S_1)| \geq 2$, $|\mathit{\Gamma}(S_2)| \geq 2$, тогда $\mathit{\Gamma}(S_1) = \mathit{\Gamma}(S_2)$ и $|\mathit{\Gamma}(S_1)| = 2$.

Доказательство.
Докажем, что $\mathit{\Gamma}(S_1) = \mathit{\Gamma}(S_2)$.
Пусть нет, тогда существует 3 различных грани: $\mathit{\Gamma}_1 \in \mathit{\Gamma}(S_1)$, $\mathit{\Gamma}_2 \in \mathit{\Gamma}(S_2)$, $\mathit{\Gamma}_3 \in (\mathit{\Gamma}(S_1) \cap \mathit{\Gamma}(S_2))$.
Каждую α-цепь L_1 сегмента S_1 можно уложить в $\mathit{\Gamma}_1$. Каждую α-цепь L_2 сегмента S_2 можно уложить в $\mathit{\Gamma}_2$. Следовательно каждую пару цепей $L_1 \in S_1$ и $L_2 \in S_2$ можно одновременно уложить вне грани $\mathit{\Gamma}_3 \quad \Rightarrow \quad$ внутри грани $\mathit{\Gamma}_3$ противоречие с конфликтностью.

□

Построим граф сегментов $S(\tilde{G})$: $VS(\tilde{G})$ и две вершинки смежны, если сегменты конфликтуют.
Частичной укладкой планарного графа G называется такой граф, который можно получить из укладки графа G на плоскость удалением некоторых вершин.

1.1.8 Лемма 34

Если после очередного шага алгоритма получили частичную укладку $\tilde{G}$ планарного графа G такую, что
$\forall S \quad |\mathit{\Gamma}(S)| \geq 2$, то $S(\tilde{G})$ – двудольный.

Доказательство.
От противного. По критерию двудольности в $S(\tilde{G})$ есть цикл нечётной длины $S_1, \ldots, S_r, S_1$.
По лемме 33: $\forall i = 1, \ldots, r \quad \mathit{\Gamma}(S_i) = \{\mathit{\Gamma}_1, \mathit{\Gamma}_2\}$.
$\tilde{G}$ – частичная укладка $\quad \Rightarrow \quad$ все сегменты могут быть уложены в $\mathit{\Gamma}_1$ или в $\mathit{\Gamma}_2$.
S_1 и S_r укладываются в $\mathit{\Gamma}_1$ и $\mathit{\Gamma}_2$ по очереди $\quad \Rightarrow \quad$ противоречие с нечётной длиной цикла. □