ПОМИ ПРЕПРИНТ – 19/2008

СТРУКТУРА РАЗБИЕНИЯ ТРЕХСВЯЗНОГО ГРАФА

Д. В. Карпов, А. В. Пастор *

Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В.А. Стеклова

Российской Академии Наук

Ноябрь 2008 г.

Аннотация

Все 3-разделяющие множества трехсвязного графа разбиваются на сравнительно небольшие группы с просто описываемой структурой, называемые комплексами. В статье дается подробное описание всех рассматриваемых комплексов и их свойств. Также при помощи теоремы о разбиении (см. [2]) доказывается, что на множестве всех комплексов можно естественным образом ввести структуру гипердерева, дающую полное описание взаимного расположения комплексов.

*Исследования выполненя при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН и гранта Президента РФ НШ-4392.2008.1

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской Академии наук

PREPRINTS
of the St.Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

Введение

Структура разбиения связного графа его точками сочленения (то есть, вершинами, удаление которых делает граф несвязным) широко известна [4, 5]. В 1966 году W. T. Tutte [9] описал структуру взаимного расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе и показал, что она имеет много общего со структурой точек сочленения. В работе [2] мы разработали новый метод изучения структутуры взаимного расположения k-вершинных разделяющих множеств k-связного графа — теорему о разбиении. С ее помощью получен ряд результатов для случая произвольного k. В качестве иллюстрации работы нашего метода в конце работы [2] приведено достаточно наглядное и простое описание структуры двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе.

Настоящая работа поясвящена изучению структуры взаимного расположения трехвершинных разделяющих множеств (вершинно) трехсвязного графа. Мы будем использовать теорему о разбиении и в результате получим описание, похожее на аналогичную структуру для двусвязного графа [9, 2].

1 Основные понятия

Всюду в настоящей работе под графом будет пониматься конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер.

На протяжении всей работы мы будем пользоваться следующими определениями и обозначениями. Множества вершин и ребер графа G будем обозначать через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Степень вершины v в графе G мы будем обозначать через $d_G(v)$.

Мы будем называть две вершины графа связанными, если существует путь между ними. Под компонентой связности графа в работе подразумевается максимальное по включению множество его попарно связанных вершин.

Граф G называется *k-связным*, если он содержит как минимум $k+1$ вершину, и сохраняет связность при удалении любых $k-1$ вершин. В частности, при $k=2$ такой граф называется двусвязным, а при $k=3$ — трехсвязным.

Для любого множества ребер $E \subset E(G)$ мы, как обычно, будем обозначать через $G-E$ граф, полученный из G в результате удаления ребер множества E. Для $e \in E(G)$ положим $G-e = G-\{e\}$.

Для любого множества вершин $V \subset V(G)$ мы будем обозначать через $G-V$ граф, полученный из G в результате удаления вершин множества V

и всех инцидентных им ребер. Для $v \in V(G)$ положим $G - v = G - \{v\}$.

Для любого множества $M \subset V(G) \cup E(G)$ мы будем обозначать через $G - M$ граф, полученный из G в результате удаления вершин и ребер множества M и всех ребер, инцидентных вершинам множества M.

Во всей работе пусть G — трехсвязный граф, причем $|V(G)| > 6$.

Множество $S \subset V(G)$ называется *разделяющим*, если граф $G - S$ несвязен. Семейство всех разделяющих множеств графа G мы будем обозначать через $\mathfrak{R}(G)$, а семейство всех его 3-вершинных разделяющих множеств (мы будем называть такие множества 3-*разделяющими*) будем обозначать через $\mathfrak{R}_3(G)$.

Мы будем использовать терминологию из работы [2]. Приведем нужные нам определения из этой работы в виде, удобном для трехсвязного графа.

Определение 1. 1) Пусть $R, X \subset V(G)$. Будем говорить, что множество R *разделяет* множество X, если не все вершины из $X \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

2) Пусть $U, W \subset V(G)$. Будем говорить, что множество R *отделяет* множество U от множества W, если $U \not\subset R$, $W \not\subset R$ и никакие две вершины $u \in U \setminus R$ и $w \in W \setminus R$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.

В случае, когда $U = \{u\}$, мы будем говорить, что R отделяет вершину u от множества W. Если же $U = \{u\}$ и $W = \{w\}$, то мы будем говорить, что R отделяет вершину u от вершины w.

Определение 2. 1) Будем называть множества $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В противном случае, назовем эти множества *зависимыми*.

2) Каждому набору $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_3(G)$ поставим в соответствие *граф зависимости* $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$, вершины которого — множества набора $\mathfrak{S}$, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие множества зависимы.

Таким образом, набор $\mathfrak{S}$ разбивается на *компоненты зависимости* — поднаборы, соответствующие компонентам связности графа $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$.

Нетрудно доказать, что если T не разделяет S, то S не разделяет T, то есть, эти множества независимы (см. [6, 3]).

Определение 3. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_3(G)$.

1) *Часть* разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ (или часть $\mathfrak{S}$-разбиения) — это максимальное по включению множество $A \subset V(G)$ такое, что никакое множество $S \in \mathfrak{S}$ не разделяет A. Будем обозначать через $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$

множество всех таких частей. Если набор $\mathfrak{S}$ состоит из одного множества S, то будем обозначать множество всех частей $\{S\}$-разбиения через $\mathrm{Part}(S)$.

2) Вершины части $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, не входящие ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$, будем называть *внутренними*, а множество всех таких вершин — *внутренностью* части A, которую будем обозначать через $\mathrm{Int}(A)$. Вершины части A, входящие в какие-либо множества из $\mathfrak{S}$, мы будем называть *граничными*, а множество всех этих вершин — *границей* части A и обозначать через $\mathrm{Bound}(A)$.

3) Назовем часть A *пустой*, если $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$ и *непустой* в противном случае. Назовем часть A *малой*, если $|A| < 3$ и *нормальной*, если $|A| \geq 3$.

Нетрудно понять, что две различные части $A_1, A_2 \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ либо не имеют общих вершин, либо $A_1 \cap A_2$ содержится в одном из множеств набора $\mathfrak{S}$. В [2, теорема 2] доказано, что граница $\mathrm{Bound}(A)$ состоит из всех вершин части A, имеющих смежные вершины вне A и отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от $V(G) \setminus A$.

Важным частным случаем разбиения трехсвязного графа набором 3-разделяющих множеств является разбиение этого графа одним 3-разделяющим множеством S. Понятно, что для любой части $F \in \mathrm{Part}(S)$ ее внутренность $\mathrm{Int}(F)$ есть множество вершин одной из компонент связности графа $G - S$. Так как никакое подмножество множества S не является разделяющим множеством графа G, то каждая вершина множества S должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(F)$, то есть, индуцированный подграф графа G на множестве вершин F связен.

Отметим, что каждая вершина x графа G смежна хотя бы с одной другой вершиной y. Тогда никакое множество не может разделить x и y, следовательно, для произвольного набора $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_3(G)$ любая часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ содержит хотя бы две вершины. Таким образом, любая малая часть содержит ровно две вершины.

1.1 Зависимые и независимые разделяющие множества

Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$. Понятно, что эти множества независимы тогда и только тогда, когда существует часть $F \in \mathrm{Part}(S)$, содержащая множество T. В работе [2, лемма 1] доказано, что если существует часть $A \in \mathrm{Part}(S)$ такая, что $\mathrm{Int}(A) \cap T = \varnothing$, то множества S и T независимы. Разбиение графа парой зависимых разделяющих множеств описывается следующей леммой.

Лемма 1 ([2, лемма 7]). *Пусть множества* $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ *зависимы. Пусть* $\mathrm{Part}(S) = \{F_1, \dots, F_n\}$, *а* $\mathrm{Part}(T) = \{H_1, \dots, H_m\}$. *Для всех* $i \in \{1, \dots, n\}$ *и* $j \in \{1, \dots, m\}$ *введем обозначения*

$$P = S \cap T, \quad S_j = S \cap \mathrm{Int}(H_j), \quad T_i = T \cap \mathrm{Int}(F_i), \quad G_{i,j} = F_i \cap H_j.$$

Тогда

$$\mathrm{Part}(\{S, T\}) = \{G_{i,j}\}_{i \in \{1,\dots,n\},\, j \in \{1,\dots,m\}}, \qquad \mathrm{Bound}(G_{i,j}) = P \cup T_i \cup S_j,$$

причем $T_i \neq \varnothing$ *для всех* $i \in \{1, \dots, n\}$ *и* $S_j \neq \varnothing$ *для всех* $j \in \{1, \dots, m\}$.

Утверждение леммы 1 верно для k-разделяющих множеств k-связного графа при всех k. В интересующем нас случае $k = 3$ из нее можно легко вывести следующие утверждения. (Обозначаения в следствиях те же, что и в лемме).

Следствие 1. *Пусть множества* $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ *зависимы. Тогда* $|S \cap T| \leq 1$, *и каждое из этих множеств делит* G *не более, чем на 3 части.*

Доказательство. Легко видеть, что $m, n \leq 3$, поскольку все множества T_i и S_j непусты. С другой стороны, очевидно, что $m, n \geq 2$, следовательно, $|P| \leq 1$. $\square$

Следствие 2. *Если* $S \cap T = \varnothing$, *то в* $\mathrm{Part}(\{S, T\})$ *есть хотя бы одна малая часть. Причем* $|G_{i,j}| = 2$ *тогда и только тогда, когда* $|T_i| = |S_j| = 1$. *Любая малая часть* $G_{i,j} \in \mathrm{Part}(\{S, T\})$, *состоит из двух смежных вершин, которые можно обозначить* u *и* v *так, что* $u \in S$ *и* $v \in T$. *Более того,* v *— единственная вершина части* H_j, *смежная с* u, *а* u *— единственная вершина части* F_i, *смежная с* v.

Доказательство. Поскольку $|T_1| + |T_2| \leq 3$, как минимум одно из множеств T_1 или T_2 состоит ровно из одной вершины. Не умаляя общности можно считать, что это T_1. Аналогично мы можем считать, что $|S_1| = 1$. Тогда $|\mathrm{Bound}(G_{1,1})| = |T_1 \cup S_1| = 2$. Следовательно, $\mathrm{Int}(G_{1,1}) = \varnothing$ и $|G_{1,1}| = 2$. Аналогично, малой является любая часть $G_{i,j}$, для которой $|T_i| = |S_j| = 1$.

Пусть $|G_{i,j}| = 2$. Очевидно, что тогда $|T_i| = |S_j| = 1$ и $G_{i,j} = \{u, v\}$, где $T_i = \{u\}$, $S_j = \{v\}$. Поскольку $u \in T$, вершина u должна быть смежна хотя бы с одной внутренней вершиной части H_j. С другой стороны, так как $u \in \mathrm{Int}(F_i)$, вершина u может быть смежна только с вершинами части F_i. Кроме того, $F_i \cap H_j = G_{i,j} = \{u, v\}$, следовательно, единственной вершиной части H_j, которая может быть смежна с u, является v. Таким образом, вершины u и v смежны и v — единственная вершина части H_j, смежная с u. Аналогично, u — единственная вершина части F_i, смежная с v. $\square$

Следствие 3. *Если $|S \cap T| = 1$, то $m = n = 2$ и в $\mathrm{Part}(\{S, T\})$ нет малых частей. Кроме того, любая пустая часть $\{S, T\}$-разбиения графа G состоит ровно из трех вершин, которые можно обозначить u, v и p так, что $u \in S \setminus T$, $v \in T \setminus S$ и $P = \{p\}$, причем вершины u и v смежны.*

Доказательство. Поскольку все множества T_1, T_2, S_1, S_2, P непусты, мы получаем, что $m = n = 2$ и $|T_1| = |T_2| = |S_1| = |S_2| = |P| = 1$. Любая часть $G_{i,j}$ должна содержать вершины множеств T_i, S_j и P, то есть как минимум 3 вершины. Таким образом, малых частей нет.

Если $\mathrm{Int}(G_{i,j}) = \varnothing$, то $G_{i,j} = \mathrm{Bound}(G_{i,j}) = T_i \cup S_j \cup P$. Следовательно, $|G_{i,j}| = 3$. Пусть $T_i = \{u\}$, $S_j = \{v\}$, $P = \{p\}$. Тогда $G_{i,j} = \{u, v, p\}$. То, что вершины u и v смежны доказывается так же, как и в следствии 2. $\square$

Замечание 1. Мы можем исключить из рассмотрения случай $m = n = 3$, поскольку в этом случае $P = \varnothing$ и $|T_1| = |T_2| = |T_3| = |S_1| = |S_2| = |S_3| = 1$. Тогда все части $\{S, T\}$-разбиения, очевидно, являются малыми. То есть никаких других вершин, кроме вершин множеств S и T, в графе G нет. Но тогда $|G| = 6$, а, как было указано в начале статьи, такие графы мы рассматривать не будем. (Нетрудно заметить, что в этом случае граф G изоморфен $K_{3,3}$.)

Лемма 2. *Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ и части $A_1, \ldots, A_k \in \mathrm{Part}(T)$ таковы, что $S \cap \mathrm{Int}(A_i) = \varnothing$ при $i \in \{1, \ldots, k\}$. Тогда множество S не разделяет $A = \cup_{i=1}^{k} A_i$.*

Доказательство. Нетрудно понять, что вершины каждого из множеств $\mathrm{Int}(A_1), \ldots, \mathrm{Int}(A_k)$ связаны в $G - S$, и с каждым из них связаны все вершины непустого множеств $T \setminus S$. Следовательно, S не разделяет A. $\square$

2 Основные структуры

В этом разделе мы опишем основные структуры, которые могут образовывать зависимые разделяющие множества, и докажем их простейшие свойства.

2.1 Ромашки в трехсвязном графе

Рассмотрим набор $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ вершин графа G ($m \ge 4$), в котором вершины $q_1, \dots, q_m$ считаются *циклически упорядоченными*. Мы будем считать, что циклическая перестановка множества $q_1, \dots, q_m$ не меняет набора F. Введем обозначение $Q_{i,j} = \{q_i, q_j, p\}$. Пусть $\mathfrak{R}(F)$ — набор, состоящий из множеств $Q_{i,j}$ для всех пар различных несоседних в циклическом порядке индексов i и j.

Определение 4. Набор $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ будем называть *ромашкой*, если существует такой набор $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(F)$, что разбиение $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ состоит из m частей $G_{1,2}$, $G_{2,3}$, $\dots$, $G_{m,1}$, причем $\mathrm{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$. Вершину p мы будем называть *центром*, а вершины $q_1, \dots, q_m$ — *лепестками* этой ромашки. Множество $V(F) = \{p, q_1, \dots, q_m\}$ назовем *множеством вершин* ромашки F. Все множества $Q_{i,j} = \{q_i, q_j, p\}$ мы будем называть *множествами ромашки* F.

Будем говорить, что набор $\mathfrak{S}$ *порождает* ромашку F.

Введенные выше обозначения будем считать стандартными для ромашки. Лепестки ромашки всегда будем указывать в циклическом порядке и рассматривать их индексы, как вычеты по модулю количества лепестков. Введем обозначение $G_{i,j} = \cup_{x=i}^{j-1} G_{x,x+1}$ (индекс x пробегает значения от i до $j-1$ в циклическом порядке). Мы считаем, что $G_{x,x} = \varnothing$.

В работе [2, лемма 9] доказано, что граф зависимости любого набора k-разделяющих множеств, порождающего ромашку, связен. Также в работе [2] доказано (см. теорему 6 и следствия из нее), что множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$, а при $j \notin \{i, i+1, i-1\}$, более того, $\mathrm{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

Множества $Q_{1,2}, Q_{2,3}, \dots, Q_{m,1}$ мы будем называть *границами*, а остальные множества $Q_{i,j}$ — *внутренними множествами* ромашки F. Для любого i выполняется $G_{i+1,i} \in \mathrm{Part}(Q_{i,i+1})$, а $G_{i,i+1}$ есть объединение всех отличных от $G_{i+1,i}$ частей $\mathrm{Part}(Q_{i,i+1})$.

Определим разбиение графа ромашкой F как множество $\mathrm{Part}(F) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{m,1}\}$. Очевидно, что ни одна из этих частей не может быть малой.

Лемма 3. *Пусть набор $\mathfrak{S}$ порождает ромашку F. Тогда пересечение множеств набора $\mathfrak{S}$ состоит из единственной вершины — центра ромашки F.*

Доказательство. Пусть

$$F = \{p; q_1, \dots, q_m\}, \quad \mathfrak{S} = \{S_1, \dots, S_n\}, \quad P = \cap_{i=1}^{n} S_i.$$

Из $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}(F)$ очевидно, что $P \ni p$. Если $P \neq \{p\}$, то P содержит один из лепестков ромашки, пусть $P \ni q_i$. Тогда все части $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \mathrm{Part}(F)$ содержат q_i. Однако, множество вершин $G_{i+1,i-1} \not\ni q_i$ является объединением нескольких частей $P(F)$. Противоречие, завершающее доказательство леммы. □

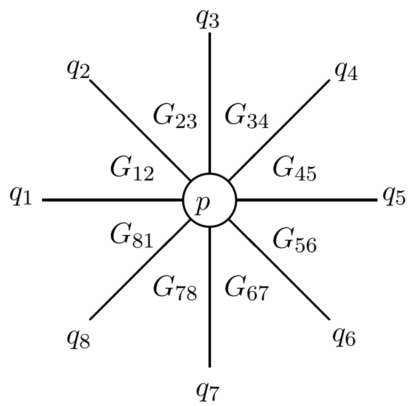
Замечание 2. 1) Если часть $G_{i,i+1}$ пуста, то по описанной выше структуре ромашки и следствию 3 вершины q_i и q_{i+1} смежны.

2) Если обе части $G_{i-1,i}$ и $G_{i,i+1}$ пусты, то вершина q_i смежна в графе G с вершинами p, q_{i-1}, q_{i+1} и только с ними.

3) Если множества $S = \{a, u, v\}, T = \{a, x, y\} \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимы, то с помощью леммы 1 и следствия 3 нетрудно понять, что эти два множества образуют ромашку с центром a и лепестками u, x, v, y (следующими именно в таком циклическом порядке).

Одну и ту же ромашку F могут порождать разные наборы 3-разделяющих множеств, однако, как доказано в [2, теорема 7] все такие наборы разбивают граф одинаково — на части из $\mathrm{Part}(F)$. Более того, в указанной теореме доказано, что если два набора $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T} \in \mathfrak{R}_k(G)$ порождают ромашки с одинаковым центром и одинаковыми множествами лепестков, то эти ромашки совпадают (то есть циклические порядки лепестков в этих ромашках одинаковы).

На рисунке изображено разбиение графа ромашкой с восемью лепестками.



Таким образом, ромашка в трехсвязном графе напоминает "колесо", от которого, согласно работе [8], "произошли" все трехсвязные графы.

Кроме этого нам понадобится следующая теорема, также доказанная в работе [2].

Теорема 1 ([2, теорема 8]). *Для любого набора разделяющих множеств $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_3(G)$ следующие два утверждения равносильны.*

1° *Каждая часть* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *содержит хотя бы три вершины.*

2° *Каждая компонента зависимости набора $\mathfrak{S}$ либо состоит ровно из одного множества, либо образует ромашку.*

Следствие 4. *Если граф зависимости набора $\{S_1, S_2, \dots, S_n\} \subset \mathfrak{R}_3(G)$ связен и $\cap_{i=1}^{n} S_i \neq \varnothing$, то этот набор порождает ромашку.*

Доказательство. Очевидно, можно так перенумеровать множества нашего набора, что для любого $\ell \in \{1, \dots, n\}$ граф зависимости набора $\mathfrak{S}_\ell = \{S_1, S_2, \dots, S_\ell\}$ связен. Докажем индукицей по ℓ, что набор $\mathfrak{S}_\ell$ образует ромашку. База для $\ell = 2$ очевидна из замечания 2.

Докажем переход от ℓ к $\ell + 1$. Пусть набор $\mathfrak{S}_\ell$ порождает ромашку $F = (p; q_1, \dots, q_m)$. Если $S_{\ell+1}$ не разбивает ни одну из частей $\mathrm{Part}(F)$, то $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}_{\ell+1}) = \mathrm{Part}(F)$. В этом разбиении очевидно нет малых частей и по теореме 1 переход доказан.

Пусть $S_{\ell+1}$ разбивает одну из частей $\mathrm{Part}(F)$. Как следует из замечания 2, множество $S_{\ell+1}$ не может разбивать ни одну из пустых частей $\mathrm{Part}(F)$. Пусть $S_{\ell+1}$ разбивает непустую часть $G_{i,i+1}$. Тогда $S_{\ell+1}$ зависимо с $Q_{i,i+1}$. По лемме 3 мы имеем $\cap_{i=1}^{\ell} S_i = \{p\}$, следовательно, $S_{\ell+1} \ni p$. Теперь из зависимости множеств $S_{\ell+1}$ и $Q_{i,i+1}$ следует, что $S_{\ell+1} \cap Q_{i,i+1} = \{p\}$, пересечение $S_{\ell+1} \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$ состоит из одной вершины x, а вершины q_i и q_{i+1} лежат в разных частях $\mathrm{Part}(S_{\ell+1})$. Тогда по лемме 1 множество $S_{\ell+1}$ разбивает часть $G_{i,i+1}$ на две части с границами $\{q_i, p, x\}$ и $\{q_{i+1}, p, x\}$. Кроме того, по следствию 3, обе эти части не являются малыми. Таким образом, в $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}_{\ell+1})$ нет малых частей и по теореме 1 этот набор образует ромашку. Переход доказан. $\square$

Определение 5. Будем говорить, что ромашка F *содержит* ромашку F', если у них общий центр и $V(F') \subset V(F)$. Назовем ромашку F *максимальной*, если она не содержится ни в какой другой ромашке.

Лемма 4. *Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ — максимальная ромашка. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Не существует множества $T \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{R}(F)$, содержащего p и зависимого хотя бы с одним из множеств ромашки F.*

2) *Для любой вершины $v \in \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$ существует путь из q_i в q_{i+1}, не проходящий через v, внутренние вершины которого лежат в $\mathrm{Int}(G_{i,i+1})$.*

Доказательство. 1) Предположим противное. Множество S, зависимое с одним из множеств ромашки F, обязательно зависимо и с каким-то множеством набора $\mathfrak{R}(F)$. То есть граф зависимости набора $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}(F) \cup \{S\}$ связен. Кроме того, все множества этого набора содержат вершину p. Тогда по следствию 4 существует ромашка F' такая, что $\mathfrak{R}(F') \supset \mathfrak{S}$.

Очевидно, F' содержит F, причем эти ромашки различны. Противоречие с максимальностью F.

2) Предположим противное. В этом случае несложно понять, что множество $T = \{v, p, q_{i+2}\}$ разделяет q_i и q_{i+1}, то есть, является разделяющим и зависимым с $Q_{i,i+1}$. Противоречие с пунктом 1. $\square$

Замечание 3. 1) По набору $\mathfrak{R}(F)$ нетрудно восстановить центр и лепестки ромашки F.

2) Нетрудно понять, что ромашка F содержит ромашку F' тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}(F) \subset \mathfrak{R}(F')$.

3) Из пункта 1 леммы 4 легко следует, что каждая ромашка содержится в единственной максимальной.

2.2 Вершинно-реберные разрезы

Определение 6. 1) Назовем множество $M \in V(G) \cup E(G)$ *разделяющим*, если граф $G - M$ несвязен. Очевидно, что каждое разделяющее множество трехсвязного графа должно содержать не менее трех элементов. Обозначим через $\mathfrak{M}_i(G)$ (где $i \in \{0, 1, 2, 3\}$) семейство, состоящее из всех разделяющих множеств, содержащих i ребер и $3 - i$ вершин графа G. Пусть $\mathfrak{M}(G) = \cup_{i=1}^{3} \mathfrak{M}_i(G)$, $\mathfrak{M}^+(G) = \mathfrak{M}(G) \cup \mathfrak{M}_0(G)$. Отметим, что $\mathfrak{M}_0(G) = \mathfrak{R}_3(G)$.

Множества из семейства $\mathfrak{M}(G)$ мы будем также называть *вершинно-реберными разрезами* (или просто *разрезами*) графа G.

2) Пусть $M, N \in \mathfrak{M}^+(G)$. Если множество N содержит все вершины множества M и для каждого ребра $e \in M$ содержит либо e, либо один из его концов, то будем говорить, что M *содержит* N (или N *содержится* в M).

Если разрез $M \in \mathfrak{M}(G)$ не содержится ни в одном другом разрезе из $\mathfrak{M}(G)$, назовем его *максимальным.*

Будем говорить, что множество $M \in \mathfrak{M}^+(G)$ можно *дополнить* ребром ab, если при замене вершины $a \in M$ на ребро ab получается разрез из $\mathfrak{M}(G)$.

Отметим, что разрез является максимальным тогда и только тогда, когда его нельзя дополнить.

Замечание 4. 1) Никакая вершина разреза $M \in \mathfrak{M}(G)$ не может быть инцидентна никакому ребру из M.

2) Если два ребра разреза $M \in \mathfrak{M}(G)$ имеют общий конец x, то x является единственной вершиной одной из компонент связности графа $G - M$. Действительно, в противном случае заменив в разрезе M эти два

ребра вершиной x мы получим разделяющее множество из двух элементов, что противоречит трехсвязности G.

3) Разрез $M \in \mathfrak{M}(G)$ мы можем рассматривать как подграф графа G (состоящий из нескольких изолированных вершин и нескольких ребер, либо не имеющих общих концов, либо имеющих ровно один общий конец). Через $V(M)$ мы будем обозначать множество вершин этого подграфа.

Пусть разрез $M \in \mathfrak{M}(G)$ содержит ребро x_1x_2. Нетрудно понять, что тогда вершины графа $G - M$ распадаются ровно на две компоненты связности, одна из которых содержит вершину x_1, а другая — x_2.

Определение 7. Пусть $x_1x_2 \in M \in \mathfrak{M}(G)$ и вершины графа $G - M$ распадаются на компоненты связности H_1 и H_2 такие, что $x_1 \in V(H_1)$ и $x_2 \in V(H_2)$. Тогда введем обозначения $G_i^M = V(G) \setminus V(H_{3-i})$ и $T_i^M = G_i^M \cap V(M)$, где $i \in \{1, 2\}$.

Множества G_1^M и G_2^M мы будем называть *частями M-разбиения* и использовать обозначение $\mathrm{Part}(M) = \{G_1^M, G_2^M\}$. *Внутренностью* части G_i^M (где $i \in \{1, 2\}$) мы будем называть множество $\mathrm{Int}(G_i^M) = G_i^M \setminus T_i^M$, а окрестностью этой части — множество $\mathrm{Nb}(G_i^M) = G_i^M \cup V(M)$. Множества T_1^M и T_2^M мы будем называть *границами* разреза M.

Для любого разреза $M \in \mathfrak{M}(G)$ мы будем использовать введенные обозначения, а каждое входящее в M ребро записывать так, что первый его конец входит в G_1^M, а второй — в G_2^M.

Замечание 5. 1) Заметим, что множество G_i^M получается из множества $V(H_i)$ добавлением всех вершин (но не ребер!) разреза M. Таким образом, часть G_i^M содержит все вершины из M и ровно по одному концу всех ребер из M. Множество T_i^M также содержит все вершины из M и ровно по одному концу всех ребер из M, и не содержит при этом никаких других вершин. То есть, если ребра разреза M не имеют общих концов, то $|T_1^M| = |T_2^M| = 3$. Если же общие концы у ребер разреза M есть, то по замечанию 4 одна из компонент связности графа G_M (обозначим ее H_1) состоит ровно из одной вершины. В этом случае $|T_1^M| = 1$ и $|T_2^M| = 3$.

2) Заметим также, что определение части M-разбиения вполне согласуется с обычным определением части разбиения графа вершинными разделяющими множествами: множества G_1^M и G_2^M — максимальные по включению множества вершин, не разделяемые разрезом M.

3) Следует отметить, что часть M-разбиения, в отличие от части разбиения графа вершинными разделяющими множествами, может состоять из одной вершины. Это происходит когда разрез M состоит из трех ребер, инцидентных вершине степени 3.

Лемма 5. *Пусть $x \in M \in \mathfrak{M}^+(G)$, $xy \in E(G)$ и H — компонента связности графа $G - M$, содержащая y. Тогда множество M можно дополнить ребром xy если и только если y — единственная вершина подграфа H, смежная с x.*

Доказательство. Пусть M' — множество, получаемое из M заменой вершины x на ребро xy. Тогда если граф $G - M'$ несвязен, то он состоит ровно из двух компонент связности, одна из которых содержит вершину x, а другая — y. Заметим, что все вершины подграфа H лежат в одной компоненте связности графа $G - M'$. То есть, если вершина x смежна в графе $G - M'$ хотя бы с одной вершиной подграфа H, то вершины x и y лежат в одной компоненте связности и, следовательно, граф $G - M'$ связен. С другой стороны, если вершина x не смежна ни с одной вершиной подграфа H, кроме y, то в графе $G - M'$, очевидно, нет пути между вершинами x и y и, следовательно, он несвязен. □

Следствие 5. *Если $M \in \mathfrak{M}_2(G)$, то существует не более одного ребра, которым можно дополнить разрез M.*

Доказательство. Пусть x — единственная вершина разреза M и H_1, H_2 — компоненты связности графа $G - M$. Тогда по лемме 5 в каждую из них ведет не более одного ребра, которым можно дополнить M. Кроме того очевидно, что $V(G) = V(H_1) \cup V(H_2) \cup \{x\}$. Поскольку граф G трехсвязен, $d(x) \geq 3$. Следовательно, вершина x не может быть смежна ровно с одной вершиной подграфа H_1 и ровно с одной вершиной подграфа H_2. То есть разрез M можно дополнить не более, чем одним ребром. □

Следствие 6. *Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимы и $\{x, y\} \in \mathrm{Part}(\{S, T\})$. Тогда каждое из множеств S и T можно дополнить ребром xy.*

Доказательство. По следствию 3, $S \cap T = \varnothing$. Не умаляя общности можно считать, что $x \in S$, $y \in T$. Пусть $x \in F \in \mathrm{Part}(T)$, $y \in H \in \mathrm{Part}(S)$. По следствию 2 вершины x и y смежны, причем y — единственная вершина части H, смежная с x. Тогда по лемме 5 множество S можно дополнить ребром xy. Аналогично, множество T также можно дополнить ребром xy. □

Определение 8. Назовем разрез $M \in \mathfrak{M}(G)$ *невырожденным*, если $\mathrm{Int}(G_1^M) \neq \varnothing$ и $\mathrm{Int}(G_2^M) \neq \varnothing$ и *вырожденным* в противном случае.

Назовем разделяющее множество $M \in \mathfrak{M}^+(G)$ *тривиальным*, если одна из компонент связности графа $G - M$ состоит из единственной вершины и *нетривиальным* в противном случае.

Случай $\mathrm{Int}(G_1^M) = \mathrm{Int}(G_2^M) = \varnothing$ нам неинтересен, поскольку в этом случае граф G содержит не более 6 вершин. Так что мы будем считать, что для любого вырожденного разреза ровно одно из множеств $\mathrm{Int}(G_1^M)$ или $\mathrm{Int}(G_2^M)$ пусто.

Замечание 6. 1) Вырожденный разрез, содержащий ровно одно ребро, является тривиальным. Действительно, если разрез $M = \{u, v, x_1x_2\}$ вырожден ($\mathrm{Int}(G_1^M) = \varnothing$), то из трехсвязности графа G понятно, что вершина x_1 смежна с вершинами x_2, u, v и только с ними. Тогда множество $T_2^M = \{x_2, u, v\}$ отделяет вершину x_1 от остальных вершин графа. При этом множество $\{x_1u, x_1v, x_1x_2\}$ также является разрезом. Как следует из замечания 4, это единственная ситуация, когда ребра разреза могут иметь общие концы.

2) Структура вырожденных разрезов, содержащих более одного ребра, также может быть легко описана. Если разрез $M = \{u, x_1x_2, y_1y_2\}$ вырожден ($\mathrm{Int}(G_1^M) = \varnothing$), то вершина x_1 смежна с вершинами y_1, x_2, u, а вершина y_1 — с вершинами x_1, y_2, u и только с ними. А если вырожденным является разрез $M = \{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\}$ (опять же $\mathrm{Int}(G_1^M) = \varnothing$), то вершины x_1, y_1, z_1 попарно смежны и кроме этого смежны еще только с соответствующими им вершинами множества T_2^M.

Лемма 6. *Пусть $M \in \mathfrak{M}(G)$ — нетривиальный разрез. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Любое трехвершинное множество, содержащее все вершины из M и ровно по одному концу всех ребер из M, но не совпадающее с T_1^M и T_2^M, является разделяющим. Более того, оно делит граф ровно на две части, одна из которых содержит G_1^M, а другая — G_2^M.*

2) *Если $\mathrm{Int}(G_2^M) \neq \varnothing$, то множество T_2^M является разделяющим, причем $\mathrm{Nb}(G_1^M) \in \mathrm{Part}(T_2^M)$, а G_2^M — объединение нескольких частей $\mathrm{Part}(T_2^M)$. В частности, если разрез M невырожден, то оба множества T_1^M и T_2^M являются разделяющими.*

Доказательство. 1) Пусть R — произвольное такое множество. Поскольку R не совпадает с T_1^M и T_2^M, множества $G_1^M \setminus R$ и $G_2^M \setminus R$ непусты. Очевидно, что множество R разделяет эти два множества и, следовательно, является разделяющим.

Докажем, что все вершины множества $G_1^M \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$. Действительно, пусть $x_1 \in T_1^M \setminus R$. Тогда $x_2 \in R$ и, поскольку разрез M нетривиален, x_1 — единственная вершина не из части G_2^M, смежная с x_2. Однако в каждой компоненте связности графа $G - R$ должна быть вершина смежная с x_2, причем в компоненте связности, содержащей вершины множества $G_1^M \setminus R$, не должно быть вершин части G_2^M. Следовательно, все вершины множества $G_1^M \setminus R$ должны лежать в одной компоненте связности графа $G - R$.

То, что все вершины множества $G_2^M \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$, доказывается аналогично.

2) Нетрудно понять, что множество T_2^M отделяет G_2^M от $\mathrm{Nb}(G_1^M)$ и, следовательно, является разделяющим. То, что все вершины множества $G_1^M \setminus T_2^M$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$, доказывается также, как и в предыдущем пункте. Тогда очевидно, что часть $\{T_2^M\}$-разбиения графа G, содержащая эти вершины, совпадает с $\mathrm{Nb}(G_1^M)$. □

Следствие 7. *Пусть $M \in \mathfrak{M}(G)$, множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимо с T_2^M, $S \cap G_2^M = \{x\}$ и множество S отделяет вершину $y \in T_2^M$ от остальных вершин множества T_2^M. Тогда разрез M можно дополнить ребром xy.*

Доказательство. Пусть $x \in H \in \mathrm{Part}(T_2^M)$ (нетрудно проверить, что $H = G_2^M$) и $y \in F \in \mathrm{Part}(S)$. По условию, $S \cap H = \{x\}$ и $T_2^M \cap F = \{y\}$. Тогда, по следствию 2, $\{x, y\} \in \mathrm{Part}(\{S, T_2^M\})$, вершины x и y смежны и x — единственная вершина части G_2^M, смежная с y. Следовательно, по лемме 5 разрез M можно дополнить ребром xy. □

Замечание 7. Очевидно, что все разделяющие множества из леммы 6 содержатся в разрезе M. Более того, все эти множества, кроме T_1^M и T_2^M, попарно зависимы, а множества T_1^M и T_2^M независимы друг с другом и с другими содержащимися в M множествами.

Определение 9. Множества, описанные в пункте 1 леммы 6, мы будем называть *внутренними множествами* разреза M. Набор, состоящий из всех внутренних множеств разреза M, будем обозначать $\mathfrak{R}(M)$.

2.2.1 Особые ребра

Лемма 7. *Пусть разрезы $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}_2(G)$ имеют два общих ребра. Тогда существует разрез $M \in \mathfrak{M}_3(G)$, содержащий M_1 и M_2.*

Доказательство. Пусть $M_1 = \{x_1x_2, y_1y_2, z_1\}$, а z_2 — единственная вершина разреза M_2. Не умаляя общности можно считать, что $z_2 \in G_2^{M_1}$. Тогда множество M_2 не разделяет вершины части $G_1^{M_1}$. В частности, оно не разделяет вершины x_1, y_1 и z_1. То есть мы можем считать, что

$M_2 = \{x_1x_2, y_1y_2, z_2\}$ и говорить, что $z_1 \in G_1^{M_2}$. Заметим, что тогда множество $T_2^{M_1} = \{x_2, y_2, z_1\}$ отделяет вершину z_2 от вершин x_1, y_1, а множество $T_1^{M_2} = \{x_1, y_1, z_2\}$ отделяет вершину z_1 от вершин x_2, y_2. Следовательно, разделяющие множества $T_2^{M_1}$ и $T_1^{M_2}$ зависимы и по следствию 7 разрез M_1 можно дополнить ребром z_1z_2 и получить искомый разрез $M = \{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\}$. □

Следствие 8. *Два максимальных разреза могут иметь не более одного общего ребра.*

Доказательство. Пусть разрезы $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}(G)$ имеют два общих ребра. Пусть $M_i' = M_i$, если $M_i \in \mathfrak{M}_2(G)$, а если $M_i \in \mathfrak{M}_3(G)$, то M_i' получается из M_i заменой третьего ребра (того, которого нет в M_{3-i}) на один из его концов. Очевидно, что эту замену можно провести так, что разрезы M_1' и M_2' будут различны. Тогда по лемме 7 разрезы M_1' и M_2' можно дополнить до разреза $M \in \mathfrak{M}_3(G)$. Однако, по следствию 5 каждый из разрезов M_1' и M_2' может содержаться только в одном разрезе из $\mathfrak{M}_3(G)$. Таким образом, разрезы M_1 и M_2 содержатся или совпадают с разрезом M и как минимум один из них не является максимальным. □

Определение 10. Назовем ребро $e \in E(G)$ *особым*, если существуют различные вершины $u, v, t, w \in V(G)$ такие, что $\{u, v, e\}, \{t, w, e\} \in \mathfrak{M}(G)$. Обозначим через $\mathfrak{N}_1(G)$ подсемейство $\mathfrak{M}_1(G)$, состоящее из всех нетривиальных разрезов, содержащих особое ребро.

Замечание 8. Пусть $\{a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2\} \in \mathfrak{M}_3(G)$. Нетрудно понять, что ребра a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2 — особые.

Определение 11. Пусть $M = \{u, v, x_1x_2\}$, $N = \{t, w, x_1x_2\} \in \mathfrak{M}_1(G)$, причем вершины u, v, t, w различны. Будем называть разрезы M и N *независимыми*, если одна из частей G_1^M и G_1^N содержит другую и *зависимыми* в противном случае.

Нетрудно понять, что разрезы M и N независимы тогда и только тогда, когда либо $t, w \in \mathrm{Int}(G_1^M)$, либо $t, w \in \mathrm{Int}(G_2^M)$.

Лемма 8. *Пусть разрезы $M, N \in \mathfrak{M}_1(G)$ зависимы и содержат ребро x_1x_2. Тогда существует разрез $\{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\} \in \mathfrak{M}_3(G)$ такой, что $M = \{x_1x_2, y_1, z_2\}$, $N = \{x_1x_2, y_2, z_1\}$.*

Доказательство. Пусть $M \cap G_1^N = \{y_1\}$, $M \cap G_2^N = \{z_2\}$, $N \cap G_1^M = \{z_1\}$, $N \cap G_2^M = \{y_2\}$. Рассмотрим множества $T_2^M = \{x_2, y_1, z_2\}$ и $T_1^N = \{x_1, y_2, z_1\}$. Заметим, что T_2^M отделяет вершину y_2 от вершин x_1, z_1, а T_1^N отделяет вершину y_1 от вершин x_2, z_2. Тогда, по следствию 7 разрезы M и N можно дополнить ребром y_1y_2. Получившиеся разрезы $\{x_1x_2, y_1y_2, z_1\}$ и $\{x_1x_2, y_1y_2, z_2\}$ по лемме 7 можно дополнить ребром $\{z_1z_2\}$, и получить требуемый разрез $\{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\}$. $\square$

Теорема 2. *Для вершин $x_1, x_2 \in V(G)$ следующие два условия эквивалентны.*

1° *Вершины x_1 и x_2 смежны, x_1x_2 — особое ребро.*

2° *Существуют зависимые множества $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ такие, что $x_1 \in S$, $x_2 \in T$ и $\{x_1, x_2\} \in \mathrm{Part}(\{S, T\})$.*

Доказательство. 1. Пусть выполняется условие 2°. Тогда по следствию 6 разделяющие множества S и T можно дополнить ребром x_1x_2. Следовательно, ребро x_1x_2 является особым.

2. Пусть выполняется условие 1°, то есть, существуют различные вершины $u, v, t, w \in V(G)$ такие, что $M = \{u, v, x_1x_2\}, N = \{t, w, x_1x_2\} \in \mathfrak{M}(G)$. Рассмотрим два случая.

2а. Предположим, что M и N независимы. Не умаляя общности можно считать, что $G_1^M \supset G_1^N$ и $G_2^M \subset G_2^N$. Рассмотрим непересекающиеся множества T_1^M и T_2^N. В нашем случае $t, w \in \mathrm{Int}(G_1^M)$, $x_2 \notin G_1^M$. Тогда по лемме 11 множество T_1^M является разделяющим и отделяет x_2 от t, w. Аналогично, множество T_2^N является разделяющим и отделяет x_1 от u, v. Следовательно, множества $T_1^M = \{x_1, u, v\}$ и $T_2^N = \{x_2, t, w\}$ зависимы и, по следствию 2, $\{x_1, x_2\} \in \mathrm{Part}(\{T_1^M, T_2^N\})$.

2б. Предположим, что M и N зависимы. Тогда по лемме 8 существует разрез $\{x_1x_2, y_1y_2, z_1z_2\} \in \mathfrak{M}_3(G)$ такой, что $M = \{x_1x_2, y_1, z_2\}$, $N = \{x_1x_2, y_2, z_1\}$. Рассмотрим множества $S = \{x_1, y_2, z_2\}$ и $T = \{x_2, y_1, z_1\}$. По лемме 6 $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$, причем S отделяет вершину x_2 от вершин y_1, z_1, и T отделяет вершину x_1 от вершин y_2, z_2. Таким образом, множества S и T зависимы и, по следствию 2, $\{x_1, x_2\} \in \mathrm{Part}(\{S, T\})$. $\square$

2.3 Тривиальные разделяющие множества и тройные разрезы

Напомним, что (вершинно-реберное) разделяющее множество M мы называем *тривиальным*, если одна из компонент связности графа $G - M$ состоит из единственной вершины. Очевидно, что степень этой вершины равна 3. В данном разделе мы подробнее изучим тривиальные вершинные разделяющие множества.

Определение 12. Пусть $T \in \mathfrak{R}_3(G)$ — тривиальное множество, отделяющее вершину a от остальных вершин графа, а множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, содержащее вершину a, таково, что $|\mathrm{Part}(S)| = 3$ и внутренность каждой части $\mathrm{Part}(S)$ содержит по вершине множества T. Тогда будем говорить, что тривиальное множество T *подчинено* множеству S. Обозначим через $\mathfrak{D}$ набор, состоящий из всех 3-разделяющих множеств, для которых существует подчиненное тривиальное множество.

Замечание 9. Из определения нетрудно понять, что если $S \in \mathfrak{D}$, то существует вершина $a \in S$ степени 3.

Лемма 9. 1) *Если множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ делит граф более, чем на три части, то S независимо со всеми множествами из $\mathfrak{R}_3(G)$. Если множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ делит граф на три части и зависимо с $T \in \mathfrak{R}_3(G)$, то T — тривиальное и подчинено S.*

2) *Тривиальное множество может быть подчинено не более, чем одному разделяющему множеству.*

Доказательство. 1) Пусть множества $S, T \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимы. Тогда, по следствию 1, $|\mathrm{Part}(S)| \leq 3$ и $|\mathrm{Part}(T)| \leq 3$. Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{H_1, H_2, H_3\}$. Тогда если $|\mathrm{Part}(T)| = 3$, то, по замечанию 1, $|V(G)| = 6$, но этот случай нам не интересен. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $|\mathrm{Part}(T)| = 2$. Пусть $\mathrm{Part}(T) = \{F_1, F_2\}$. Можно обозначить части так, что $\mathrm{Int}(F_1) \cap S = \{a\}$, $|\mathrm{Int}(F_2) \cap S| = 2$. Тогда по следствию 2, множество S делит F_1 на три пустые части. Следовательно, $\mathrm{Int}(F_1) = \{a\}$, то есть, множество T — тривиальное.

2) Пусть T — тривиальное множество, подчиненное двум множествам S и S'. По пункту 1 тогда $|\mathrm{Part}(S)| = |\mathrm{Part}(S')| = 3$, следовательно, множества S и S' независимы. Пусть $A \in \mathrm{Part}(S)$ — часть, содержащая S'. Тогда две вершины множества T не лежат в A и множество S' не может разделить эти две вершины. Противоречие. $\square$

Далее в этом разделе мы будем рассматривать множество $S \in \mathfrak{D}$.

Определение 13. Рассмотрим вершину $a \in S$, имеющую степень 3. Смежные с ней вершины образуют тривиальное разделяющее множество, отделяющее вершину a от остальных вершин графа. Это множество будем называть *окрестностью* вершины a и обозначать через $T(a)$.

Легко видеть, что если $a \in S$ и $d(a) = 3$, то $T(a)$ — тривиальное множество, подчиненное S. При этом множество S можно дополнить любым ребром вида aa_i, где $a_i \in T(a)$.

Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2, A_3\}$. Обозначим через M_i множество, получающееся из S заменой всех вершин степени 3 на ребра, соединяющие эти вершины с вершинами их окрестностей, лежащими в $\mathrm{Int}(A_i)$. Из сказанного выше следует, что $M_1, M_2, M_3 \in \mathfrak{M}(G)$.

Разрезы M_1, M_2, M_3 могут быть не максимальными. Если разрез M_i содержится в разрезе из $\mathfrak{M}_3(G)$, то обозначим последний через M'_i (очевидно, что он единственен). В остальных случаях (в том числе и в случае, когда $M_i \in \mathfrak{M}_1(G)$ и содержится в разрезе из $\mathfrak{M}_2(G)$) положим $M'_i = M_i$.

Очевидно, что $V(M_i) \subset V(M'_i) \subset A_i$. При этом множество S является одной из границ разрезов M_i и M'_i. Из леммы 6 следует, что $A_{i+1} \cup A_{i+2} \in \mathrm{Part}(M_i)$ и $A_{i+1} \cup A_{i+2} \in \mathrm{Part}(M'_i)$ (нумерация циклическая по модулю 3). Обозначим другую часть $\mathrm{Part}(M_i)$ через B_i, а ее границу — через T_i. Через B'_i обозначим часть $\mathrm{Part}(M'_i)$, содержащуюся в B_i. Ее границу обозначим через T'_i. У B_i как у части $\mathrm{Part}(M_i)$ и у B'_i как у части $\mathrm{Part}(M'_i)$ определены окрестности. Легко видеть, что $\mathrm{Nb}(B_i) = \mathrm{Nb}(B'_i) = A_i$.

Отметим, что разрез M_i (а, следовательно, и M'_i) может быть тривиальным. В этом случае $|B'_i| = 1$. При этом, если все вершины множества S имеют степень 3, то и $|B_i| = 1$.

Определение 14. Множество $F = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ мы будем называть *тройным разрезом*, а множество $\mathrm{Nb}(F) = V(M'_1) \cup V(M'_2) \cup V(M'_3)$ — его *окрестностью*. Множество S будем назывть *осью* тройного разреза. Все внутренние разделяющие множества разрезов M_i, множество S и все подчиненные ему множества будем называть *внутренними множествами* тройного разреза. Множества T_i будем называть *границами* тройного разреза, а множества T'_i — границами его окрестности. Определим $V(F) = V(M_1) \cup V(M_2) \cup V(M_3)$ и $\mathrm{Part}(F) = \{B_1, B_2, B_3\}$.

Замечание 10. Нетривиальное определение разреза M'_i связано с тем, что мы стремимся с одной стороны к максимально простому описанию того, на какие части разбивают граф множества, содержащиеся в окрестности тройного разреза но не являющиеся его границами (совокупность таких множеств мы далее будем называть тройным комплексом). С другой стороны мы стремимся к тому, чтобы любое 3-разделяющее множество, не содержащееся в $\mathrm{Nb}(F)$, отделяло от нее не более одной вершины. В последующих разделах будет показано, что приведенное выше определение окрестности удовлетворяет обоим этим условиям.

3 Дальнейшие свойства основных структур

Описанные в предыдущем разделе структуры порождаются наборами зависимых разделяющих множеств. В этом разделе мы опишем их связь с другими разделяющими множествами и друг с другом.

3.1 Внутренние разделяющие множества

Лемма 10. *Пусть S — множество из трех лепестков ромашки F. Тогда S не является разделяющим множеством.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$. Тогда, очевидно, все вершины из $G_{i,i+1} \setminus S$ связаны в $G - S$, и в числе этих вершин есть p. Таким образом, в $G - S$ связаны все вершины, кроме, быть может, некоторых лепестков ромашки, не входящих в непустые части $\mathrm{Part}(F)$. Но любой такой лепесток q_j входит в две пустые части $\mathrm{Part}(F)$ и по замечанию 2 он смежен с p. Таким образом, граф $G - S$ связен. $\square$

Следствие 9. *Любое 3-разделяющее множество, содержащееся в множестве вершин ромашки, содержит ее центр, то есть является либо внутренним множеством ромашки, либо ее границей.*

Лемма 11. *Пусть $M \in \mathfrak{M}(G)$ — нетривиальный разрез, содержащий ребро x_1x_2. Тогда не существует множества $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, содержащего x_1 и x_2.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $x_1, x_2 \in S \in \mathfrak{R}_3(G)$. Не умаляя общности предположим, что $S = \{x_1, x_2, t\}$, где $t \in G_1^M$. Так как $\mathrm{Int}(G_2^M)$ есть объединение внутренностей нескольких частей $\mathrm{Part}(T_2^M)$ и $S \cap \mathrm{Int}(T_2^M) = \varnothing$, то по лемме 2 вершины из $G_2^M \setminus S$ связаны в графе $G - S$. Более того, с ними также связаны вершины множества $T_1^M \setminus S$, поскольку каждая вершина этого множества либо принадлежат множеству $T_2^M \setminus S$, либо смежна с одной из его вершин.

Рассмотрим произвольную вершину $w \in \mathrm{Int}(G_1^M) \setminus S$ (если такая есть). Так как $\mathrm{Int}(G_1^M)$ есть объединение внутренностей нескольких частей $\mathrm{Part}(T_1^M)$, то по теореме Менгера существуют три проходящих по G_1^M непересекающихся по внутренним вершинам пути от w до трех вершин множества T_1^M. Поскольку $|S \cap G_1^M| = 2$, то хотя бы один из таких путей не пересекается с S, следовательно, в графе $G - S$ вершина w связана с $G_2^M \setminus S$. Таким образом, граф $G - S$ связен, противоречие. $\square$

Следствие 10. *Любое 3-разделяющее множество, содержащееся в множестве вершин разреза, содержит все его вершины и ровно по одной вершине каждого его ребра. То есть это множество является либо внутренним множеством разреза, либо его границей.*

Лемма 12. 1) *Любое 3-разделяющее множество, содержащееся в множестве вершин тройного разреза, является либо его внутренним множеством, либо его границей.*

2) *Любое 3-разделяющее множество, содержащееся в окрестности тройного разреза $F = M_1 \cup M_2 \cup M_3$, либо подчинено его оси, либо содержится в одном из разрезов M'_i, где $i \in \{1, 2, 3\}$.*

Доказательство. 1) Множество, зависимое с осью тройного разреза, по лемме 9 должно быть ей подчинино и, следовательно, является внутренним множеством тройного разреза. Множество, независимое с осью тройного разреза содержится в одном из множеств $V(M_i)$ (где рассматриваемый тройной разрез $F = \cup_{i=1}^{3} M_i$). Тогда по следствию 10 оно является либо внутренним множеством либо границей разреза M_i, откуда по определению оно является либо внутренним множеством либо границей тройного разреза F.

2) Аналогично предыдущему пнкту, множество независимое с осью разреза содержится в одном из множеств $V(M'_i)$ и, следовательно, содержится в разрезе M'_i. □

3.2 Связь между ромашками и разрезами

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о том, в каких случаях множества вершин ромашки и разреза могут совпадать или содержаться одно в другом.

Определение 15. Будем говорить, что ромашка F *содержится* в разрезе M, если $V(F) \subset V(M)$. Будем говорить, что разрез M *содержится* в ромашке F, если $V(M) \subset V(F)$.

Лемма 13. *Ромашка, содержащаяся в разрезе, содержит ровно 4 лепестка и имеет две несоседние пустые части.*

Доказательство. Пусть M — разрез и F — ромашка, такие, что $V(F) \subset V(M)$. Очевидно, что $|V(F)| \le |V(M)| \le 6$. При этом, если $V(F) = 6$, то $M \in \mathfrak{M}_3(G)$, $V(F) = V(M)$ и разрез M нетривиален. Тогда центр ромашки F является концом одного из ребер разреза M, а другой конец этого ребра является лепестком ромашки F. Следовательно, оба конца этого ребра принадлежат одному из разделяющих множеств ромашки F, что невозможно по лемме 11. Противоречие.

Итак, $V(F) = 5$ и ромашка F содержит ровно 4 лепестка. По соображениям аналогичным изложенным выше, ее центр не может быть соединен ребром разреза M ни с одним из лепестков. Тогда ее лепестки образуют две пары соединенных ребрами разреза M. Очевидно, что лепестки, образующие пару, являются соседними (поскольку несоседние лепестки не могут быть смежны), а соответствующая им часть пуста так как иначе они были бы соединены путем, проходящим внутри этой части и, следовательно, не пересекающимся с разрезом M. $\square$

Итак, только ромашка с 4 лепестками может содержаться в разрезе. Легко видеть, что для любого нетривиального разреза из $\mathfrak{M}_2(G)$ два его внутренних множества порождают ромашку с 4 лепестками, множество вершин которой совпадает с множеством вершин разреза. Это единственный случай, когда множества вершин разреза и ромашки совпадают. Далее, для любого нетривиального разреза $M \in \mathfrak{M}_3(G)$ в нем содержатся 6 разрезов из $\mathfrak{M}_2(G)$, каждому из которых соответствует ромашка, содержащаяся в M.

Определение 16. Назовем ромашку F *невырожденной*, если она не содержится ни в каком разрезе $M \in \mathfrak{M}_3(G)$, и *вырожденной* в противном случае.

Теперь рассмотрим более часто встречающуюся ситуацию, когда разрез содержится в ромашке.

Лемма 14. *Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ — максимальная ромашка и $\{q_i, p, q_j x\} \in \mathfrak{M}(G)$. Тогда выполняется одно из следующих двух утверждений.*

1° *Вершина x — один из соседних с q_j лепестков F, причем $\{q_j, p, x\}$ — пустая часть $\mathrm{Part}(F)$.*

2° *Выполняются соотношения $\{i, j\} = \{k, k+1\}$ и $x \in \mathrm{Int}(G_{k,k+1})$, причем если $|\mathrm{Part}(Q_{k,k+1})| = 2$, то вершины q_k и q_{k+1} смежны.*

Доказательство. Понятно, что оба конца ребра $q_j x$ лежат в одной из частей $\mathrm{Part}(F)$. Не умаляя общности можно считать, что $x \in G_{j,j+1}$. Пусть $x \in H \in \mathrm{Part}(Q_{j,i})$. Заметим, что если $|\mathrm{Part}(Q_{j,i})| = 2$, то $H = G_{j,i}$ (это условие заведомо выполнено при $i \neq j+1$). Из леммы 5 следует, что q_j не смежна с отличными от x вершинами из $\mathrm{Int}(H)$.

Пусть $x \neq q_{j+1}$. Если $i \neq j+1$, то несложно понять, что множество $T = \{q_i, p, x\}$ отделяет q_j от q_{j+1} и, следовательно, является разделяющим. По лемме 4, это противоречит максимальности ромашки F. То есть $i = j+1$. Заметим далее, что если $|\mathrm{Part}(Q_{k,k+1})| = 2$, то q_j не смежна с отличными от x вершинами из $\mathrm{Int}(G_{j,j+1})$. Тогда легко видеть, что множество $T_1 = \{q_{j+2}, p, x\}$ отделяет q_j от q_{j+1} и, следовательно, является разделяющим, что также противоречит максимальности ромашки F. Таким образом, в этом случае вершины q_j и q_{j+1} должны быть смежны.

Пусть $x = q_{j+1}$. Тогда q_j не смежна ни с какой вершиной из $\mathrm{Int}(G_{j,j+1})$, откуда следует пустота части $G_{j,j+1}$. $\square$

Следствие 11. 1) *Пусть M — нетривиальный разрез и $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ — ромашка, такие, что $V(M) \subset V(F)$. Тогда $p \in M$ и любое ребро разреза M имеет вид q_jq_{j+1}, где часть $G_{j,j+1}$ пуста.*

2) *Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ — ромашка и $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \varnothing$. Тогда $\{q_j, p, q_iq_{i+1}\} \in \mathfrak{M}_1(G)$ для всех $j \notin \{i, i+1\}$. Если, кроме того, $\mathrm{Int}(G_{j,j+1}) = \varnothing$ и $i \neq j$, то $\{q_jq_{j+1}, p, q_iq_{i+1}\} \in \mathfrak{M}_2(G)$.*

Доказательство. 1) Поскольку как минимум одна из границ разреза M по лемме 6 является разделяющим множеством, она по лемме 10 содержит центр ромашки. Следовательно, $p \in V(M)$. Предположим, что $px \in M$. Очевидно, существует разделяющее множество ромашки, содержащее p и x, что противоречит лемме 11. Таким образом, $p \in M$.

Пусть $xy \in M$. Рассмотрим максимальную ромашку F', содержащую F. Поскольку x и y — лепестки F они также лепестки F'. По лемме 14 лепестки x и y должны быть соседними в ромашке F' (а следовательно, и в ромашке F) и соответствующая им часть пуста.

2) Нетрудно проверить, что каждое из этих множеств отделяет q_i от q_{i+1}. □

Замечание 11. Тривиальный разрез также может содержаться в ромашке, если в ней есть две соседние пустые части. Тогда ребра, соединяющие их общий лепесток с соседними лепестками и центром образуют тривиальный разрез. Нетрудно проверить, что любой максимальный тривиальный разрез, содержащийся в ромашке, имеет такой вид.

Определение 17. Пусть $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(F)$. Определим множество $M_{i,i+1}$ следующим образом. 1° $p \in M_{i,i+1}$;

2° $q_{i-1}q_i \in M_{i,i+1}$, если $\mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \varnothing$, и $q_i \in M_{i,i+1}$ в противном случае;

3° $q_{i+1}q_{i+2} \in M_{i,i+1}$, если $\mathrm{Int}(G_{i+1,i+2}) = \varnothing$, и $q_{i+1} \in M_{i,i+1}$ в противном случае.

Если хотя бы одна из частей $G_{i-1,i}$ и $G_{i+1,i+2}$ пуста, назовем $M_{i,i+1}$ *граничным разрезом* части $G_{i,i+1}$.

Замечание 12. 1) То, что $M_{i,i+1} \in \mathfrak{M}^+(G)$ очевидно следует из следствия 11.

2) Заметим, что граничный разрез части может не быть максимальным. Если x — единственная вершина части $G_{i,i+1}$, смежная с p, то множество $M_{i,i+1}$ можно дополнить ребром px.

3) Отметим также, что если $M_{i,i+1} \in \mathfrak{M}(G)$, то $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(M_{i,i+1})$.

Лемма 15. *Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ — невырожденная ромашка. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если множество $Q_{i,i+1}$ можно дополнить ребром px, то $x \in \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$.*

2) *Если $M_{i,i+1} \in \mathfrak{M}(G)$, то разрез $M_{i,i+1}$ нельзя дополнить никаким ребром, кроме, возможно, ребра px, где $x \in \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$ и x — единственная вершина части $G_{i,i+1}$, смежная с p.*

Доказательство. 1) Пусть $x \notin \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$. Тогда $x \in V(G) \setminus G_{i,i+1}$. Заметим, что все вершины множества $V(G) \setminus G_{i,i+1}$ лежат в одной компоненте связности графа $G - Q_{i,i+1}$ и, по лемме 5, x — единственная вершина этой компоненты связности, смежная с p. С другой стороны, вершина p должна быть смежна хотя бы с одной внутренней вершиной любой непустой частй $\mathrm{Part}(F)$ и, по замечанию 2, с общим лепестком любых двух соседних пустых частей.

Тогда среди частей, отличных от $G_{i,i+1}$, может быть не более одной непустой. Если непустых частей среди них нет, то есть как минимум три пустые части подряд, содержащие как минимум 2 смежных с p лепестка не из $G_{i,i+1}$, что невозможно. Таким образом, в $\mathrm{Part}(F)$ ровно две непустые части и нет соседних пустых частей. Это означает, что $m = 4$, $\mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \mathrm{Int}(G_{i+1,i+2}) = \varnothing$ и $\mathrm{Int}(G_{i+2,i-1}) \neq \varnothing$. Тогда $M_{i,i+1} = \{q_i q_{i-1}, q_{i+1} q_{i+2}, p\}$ и дополнив его ребром px мы получим, что ромашка F содержится в разрезе $M = \{q_i q_{i-1}, px, q_{i+1} q_{i+2}\} \in \mathfrak{M}_3(G)$, то есть является вырожденной. Противоречие.

2) Пусть разрез $M_{i,i+1}$ можно дополнить ребром e. Тогда этим же ребром можно дополнить и множество $Q_{i,i+1}$. Следовательно, по предыдущему пункту, это не может быть ребро вида px, где $x \in \mathrm{Int}(G_{i+1,i})$.

Предположим, что $e = q_i v$ (случай $e = q_{i+1} v$ аналогичен). Тогда, поскольку $M_{i,i+1} \in \mathfrak{M}(G)$, мы получаем, что $M_{i,i+1} = \{q_i, p, q_{i+1} q_{i+2}\}$. Рассмотрим два случая.

1. $v \in G_{i+1,i}$.

Тогда $v \in G_{i-1,i}$ и $\{q_{i+1}, p, q_i v\} \in \mathfrak{M}_1(G)$, следовательно, по лемме 14 получается, что $v = q_{i-1}$ и $\mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \varnothing$, но тогда $q_i v \in M_{i,i+1}$.

2. $v \in G_{i,i+1}$.

В этом случае, по лемме 6, $\{v, p, q_{i+2}\}$ — разделяющее множество, содержащее p и зависимое с $Q_{i,i+1}$. Тогда по лемме 4 ромашка F не максимальна. Противоречие.

Итак единственный возможный случай — $e = px$, где $x \in \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$. Тогда по лемме 5 x — единственная вершина части $G_{i,i+1}$, смежная с p. $\square$

Определение 18. Если множество $M_{i,i+1}$ можно дополнить ребром px, где $x \in \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$, то получившийся в результате этого разрез обозначим через $M^*_{i,i+1}$.

3.3 Множества, разделяющие основные структуры

В этом параграфе мы рассмотрим 3-разделяющие множества, которые разделяют множества вершин разреза, тройного разреза или ромашки.

Лемма 16. *Пусть максимальный нетривиальный разрез M и $S \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{R}(M)$ таковы, что S разделяет $V(M)$. Тогда $|\mathrm{Part}(S)| = 2$ и выполняется одно из следующих двух утверждений.*

1° *Разрез M содержится в ромашке, порожденной набором $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}(M) \cup \{S, T_1^M, T_2^M\}$.*

2° *Множество S содержится в окрестности одной из частей $\mathrm{Part}(M)$ (обозначим ее G_1^M). Существует такое ребро $x_1x_2 \in M$, что S отделяет вершину $x_1 \in T_1^M$ от остальных вершин множества $V(M) \setminus S$, при этом, $S \setminus G_1^M = \{x_2\}$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. $S \cap \mathrm{Int}(G_1^M) \neq \varnothing$ и $S \cap \mathrm{Int}(G_2^M) \neq \varnothing$.

В этом случае множество S зависимо со всеми множествами $\mathfrak{R}(M)$, а также с T_1^M и T_2^M. То есть граф зависимости набора $\mathfrak{S}$ связен.

Докажем, что $|S \cap G_1^M| = 2$. Пусть $S \cap G_1^M = \{x\}$. Тогда $x \in \mathrm{Int}(G_1^M)$ и $S \cap T_1^M = \varnothing$. Откуда по следствию 2 множество S должно отделять одну из вершин множества T_1^M (обозначим ее y) от остальных вершин этого множества. Но тогда по следствию 7 разрез M можно дополнить ребром xy. Противоречие с максимальностью разреза M.

Итак, $|S \cap G_1^M| = 2$. Аналогично, $|S \cap G_2^M| = 2$. Из этого следует, что $S \cap G_1^M \cap G_2^M \neq \varnothing$. То есть существует вершина $p \in M \cap S$. Но тогда эта вершина принадлежит всем множествам набора $\mathfrak{S}$, откуда по следствию 4 вытекает, что набор $\mathfrak{S}$ порождает ромашку F, содержащую разрез M. При этом $S \in \mathfrak{R}(F)$, следовательно, $|\mathrm{Part}(S)| = 2$.

2. $S \cap \mathrm{Int}(G_2^M) = \varnothing$.

В этом случае $S \subset \mathrm{Nb}(G_1^M)$, множество S независимо с T_2^M и зависимо с T_1^M. Аналогично предыдущему пункту, $|S \cap G_1^M| = 2$. Пусть $S \setminus G_1^M = \{x_2\}$. Так как $x_2 \in \mathrm{Nb}(G_1^M) \setminus G_1^M$, то существует ребро $x_1x_2 \in M$, причем $x_1 \in T_1^M$. Тогда очевидно, что S не разделяет G_2^M, следовательно, все вершины множества $V(M) \setminus S$, кроме x_1, лежат в одной компоненте связности графа $G - S$. В частности, это означает что S разделяет множество T_1^M ровно на 2 части, следовательно, $|\mathrm{Part}(S)| = 2$. ☐

Замечание 13. 1) Остановимся подробнее на втором случае в доказательстве предыдущей леммы ($S \setminus G_1^M = \{x_2\}$ и множество S отделяет вершину x_1 от остальных вершин множества $V(M)$). Очевидно, что множество S можно дополнить ребром x_1x_2. Далее возможны следующие два подслучая: множество $S \cap T_1^M$ может быть как пусто так и непусто.

В первом случае ребро x_1x_2, очевидно, является особым.

Во втором случае, если $S \cap T_1^M = \{p\}$, множества S, T_1^M а также все множества из $\mathfrak{R}(M)$, содержащие p, порождают ромашку. При этом, если $p \in M$, то эта ромашка содержит M, а если p — конец одного из ребер M, то ромашка содержит все вершины $V(M)$ за исключением второго конца этого ребра.

2) Если разрез M тривиален ($G_2^M = \{x\}$) и S разделяет $V(M)$, то $x \in S$ и либо S отделяет одну из вершин множества T_1^M от двух других, лежащих в одной компоненте связности графа $G - S$, либо разрез M содержится в тройном разрезе с осью S.

В следующей лемме пойдет речь об окрестности тройного разреза. Напомним, что по определению окрестность тройного разреза $F = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ есть множество $\mathrm{Nb}(F) = V(M_1') \cup V(M_2') \cup V(M_3')$, где разрез M_i' совпадает с M_i, если последний нельзя дополнить до разреза из $\mathfrak{M}_3(G)$, и является разрезом из $\mathfrak{M}_3(G)$, содержащим M_i, в противном случае.

Лемма 17. *Пусть тройной разрез $F = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ с осью S и множество $T \in \mathfrak{R}_3(G)$ таковы, что $T \not\subset \mathrm{Nb}(F)$ и T разделяет $\mathrm{Nb}(F)$. Тогда $|\mathrm{Part}(T)| = 2$ и множество T содержится в одной из частей $A_i \in \mathrm{Part}(S)$. Кроме того, множество T отделяет одну из вершин $x_i \in \mathrm{Int}(A_i)$ от остальных вершин множества $\mathrm{Nb}(F)$. При этом $T \setminus B_i' = \{x\}$, где $x \in S$, $xx_i \in M_i'$ и $B_i' \in \mathrm{Part}(M_i')$ — часть, содержащаяся в A_i.*

Доказательство. Пусть T зависимо с S. Тогда по лемме 9 множество T подчинено S, следовательно, $T \subset V(F)$. Противоречие.

Таким образом, T независимо с S. Следовательно, T лежит в одной из частей S-разбиения (обозначим ее A_i). Тогда, поскольку T разделяет $\mathrm{Nb}(F)$ и $T \neq S$, множество T разделяет $V(M_i')$. Кроме того, $T \not\subset V(M_i')$. Если разрез M_i' максимален, то применим к нему и множеству T лемму 16. Заметим, что, поскольку множества S и T независимы, утверждение 1° леммы 16 выполняться не может. Таким образом, выполнено утверждение 2° леммы 16, из которого следует утверждение настоящей леммы. Если же разрез M_i' не максимален, то по определению $M_i = M_i' \in \mathfrak{M}_1(G)$ и, поскольку T независимо с S, утверждение леммы в этом случае очевидно. □

Лемма 18. *Пусть максимальная ромашка $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ и множество $T \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{R}(F)$ таковы, что T разделяет $V(F)$. Тогда $|\mathrm{Part}(T)| = 2$ и выполняется одно из следующих двух утверждений.*

1° *Множество T отделяет одну из вершин множества $V(F)$ от остальных вершин этого множества.*

2° *Множество T отделяет два соседних лепестка q_{i+1}, q_{i+2} от остальных вершин множества $V(F)$. При этом $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \mathrm{Int}(G_{i+2,i+3}) = \varnothing$ и $T = \{q_i, x, q_{i+3}\}$, где $x \in \mathrm{Int}(G_{i+1,i+2})$ — единственная вершина части $G_{i+1,i+2}$, смежная с p.*

Доказательство. Заметим, что по лемме 4 $p \notin T$. Если множество T не разделяет набор $L = \{q_1, \dots, q_m\}$, то оно отделяет p от всех вершин этого набора, следовательно, выполнено утверждение 1°.

Пусть T разделяет L. Докажем, что $T \cap L \neq \varnothing$. Действительно, при $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$ и $|T \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1})| \leq 1$ по лемме 4 вершины q_i и q_{i+1} связаны в $G - T$. Если же $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \varnothing$, то лепестки q_i и q_{i+1} смежны. Так как существует не более одной такой части $G_{j,j+1}$, что $|T \cap \mathrm{Int}(G_{j,j+1})| \geq 2$, все пары соседних лепестков (кроме, возможно, одной) не разделены множеством T. Следовательно, если $T \cap L = \varnothing$, все вершины набора L связаны в $G - T$. Противоречие.

Заметим, что $|T \cap L| \leq 2$ по лемме 10. Рассмотрим следующие два случая.

1. $T \cap L = \{q_i\}$.

В этом случае обе оставшиеся вершины множества T должны лежать в одной части $\mathrm{Part}(F)$, иначе аналогично доказанному выше множество T не разделяет L. Пусть эта часть $G_{j,j+1}$. Тогда очевидно, что множество T разбивает L на наборы $\{q_{i+1}, \dots, q_j\}$ и $\{q_{j+1}, \dots, q_{i-1}\}$. Не умаляя общности можно считать, что p лежит в той же компоненте связности графа $G - T$, что и $\{q_{j+1}, \dots, q_{i-1}\}$. Докажем, что тогда $i + 1 = j$. Действительно, в противном случае $T \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+2}) = \varnothing$, следовательно, множество T не разделяет часть $G_{i,i+2}$, то есть p и q_{i+1} связаны в $G - T$. Противоречие. Таким образом, T отделяет лепесток $q_{i+1} = q_j$ от остальных вершин $V(F)$ и выполняется утверждение 1°.

2. $T \cap V(M) = \{q_i, q_j\}$.

В этом случае очевидно, что множество T разбивает L на наборы $\{q_{i+1}, \dots, q_{j-1}\}$ и $\{q_{j+1}, \dots, q_{i-1}\}$. Не умаляя общности можно считать, что p лежит в той же компоненте связности графа $G - T$, что и $\{q_{j+1}, \dots, q_{i-1}\}$. Докажем, что тогда в другом наборе не более двух вершин. Действительно, в противном случае $\mathrm{Int}(G_{i,i+2}) \cap \mathrm{Int}(G_{j-2,j}) = \varnothing$ и множество T не может пересекаться с внутренностями обеих этих частей. Тогда, аналогично пердыдущему случаю, p и $\{q_{i+1}, \dots, q_{j-1}\}$ связаны в $G - T$. Противоречие.

Далее, если $j = i+3$, то есть множество T отделяет лепестки q_{i+1}, q_{i+2} от остальных вершин множества $V(M)$, то среди частей $G_{i,i+1}$, $G_{i+1,i+2}$, $G_{i+2,i+3}$ не более одной непустой (поскольку в каждой непустой части есть путь, соединяющий ее лепесток с центром ромашки, и проходящий по внутренним вершинам этой части) и нет двух соседних пустых частей (поскольку по замечанию 2 их общий лепесток смежен с центром). Это возможно только если $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \mathrm{Int}(G_{i+2,i+3}) = \varnothing$ и $\mathrm{Int}(G_{i+1,i+2}) \neq \varnothing$. Тогда очевидно, что $T = \{q_i, x, q_{i+3}\}$, где $x \in \mathrm{Int}(G_{i+1,i+2})$. Кроме того, множества T и $Q_{i+1,i+2}$ зависимы и $\{p, x\} \in \mathrm{Part}(\{T, Q_{i+1,i+2}\})$, следовательно, x — единственная вершина части $G_{i+1,i+2}$, смежная с p. Таким образом, выполняется утверждение 2°.

Во всех случаях очевидно, что $|\mathrm{Part}(T)| = 2$, поскольку множество T зависимо с некоторыми множествами ромашки F и делит каждое из них ровно на 2 части. $\square$

Замечание 14. В случае 2° предыдущей леммы очевидно, что множество T содержится в разрезе $M^*_{i,i+1} = \{q_i q_{i+1}, px, q_{i+3} q_{i+2}\}$.

В следующих леммах мы более подробно остановимся на случае 1° леммы 18.

Лемма 19. *Пусть максимальная ромашка $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ и множество $T \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{R}(F)$ таковы, что T отделяет лепесток q_i от остальных вершин множества $V(F)$. Тогда ровно одна из частей* $\mathrm{Part}(F)$, *содержащих q_i, пуста и множество T состоит из второго лепестка этой части и двух вершин другой части, содержащей q_i.*

Доказательство. Пусть $q_i \in H \in \mathrm{Part}(T)$. По условию q_i — единственная вершина из $V(F)$, лежащая в $\mathrm{Int}(H)$. Тогда $\mathrm{Int}(H) \cap Q_{i-1,i+1} = \varnothing$, следовательно, $Q_{i-1,i+1}$ не разделяет H. Это означает, что $H \subset G_{i-1,i+1}$ и, в частности, $T \subset G_{i-1,i+1}$.

Заметим также, что $p \notin T$ по лемме 4 и, очевидно, $q_i \notin T$. Следовательно, в одной из частей $G_{i-1,i}$ и $G_{i,i+1}$ содержится не более одной вершины множества T. Не умаляя общности можно считать, что эта часть $G_{i-1,i}$. Очевидно, что $|T \cap G_{i-1,i}| = 1$, иначе вершины q_i и q_{i-1} связаны в $G - T$. Более того, если $T \cap G_{i-1,i} \neq \{q_i\}$, то по лемме 4 в части $G_{i-1,i}$ есть путь, соединяющий q_i и q_{i-1} и не пересекающийся с T, что невозможно. Следовательно, $T \cap G_{i-1,i} = \{q_i\}$, то есть $T \cap \mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \varnothing$. Но T разделяет вершины $p, q_i \in G_{i-1,i}$. Это возможно только если $\mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \varnothing$. Тогда $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$, так как иначе по замечанию 2 вершины q_i и p смежны. $\square$

Лемма 20. *Пусть разделяющее множество $T \in \mathfrak{R}_3(G)$ отделяет центр невырожденной ромашки $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ от остальных вершин множества $V(F)$. Тогда множество T отделяет p от остальных вершин графа G. При этом $m \leq 6$, в* $\mathrm{Part}(F)$ *не более трех непустых частей и внутренность любой непустой части* $\mathrm{Part}(F)$ *содержит ровно одну вершину множества T, а граница не пересекается с T.*

Доказательство. Пусть в $\mathrm{Part}(F)$ ровно k непустых и ℓ пустых частей. Если $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$, то $Q_{i,i+1}$ — разделяющее множество, зависимое с T. Следовательно, $T \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$. Таким образом, $k \leq 3$. Далее, если $\mathrm{Int}(G_{j-1,j}) = \mathrm{Int}(G_{j,j+1}) = \varnothing$, то по замечанию 2 вершины p и q_j смежны, следовательно, $q_j \in T$. Заметим, что пустые части $\mathrm{Part}(F)$ разбиваются на не более, чем k последовательностей, что дает нам не менее $\ell - k$ лепестков, смежных с p. Таким образом, $\ell = k + (\ell - k) \leq 3$, следовательно, $m = k + \ell \leq 6$.

Пусть $|T \cap G_{i,i+1}| = 2$. Тогда $|T \cap \mathrm{Int}(G_{i+1,i})| = 1$, и по лемме 5 множество $Q_{i,i+1}$ можно дополнить ребром px, где $T \cap \mathrm{Int}(G_{i+1,i}) = \{x\}$. Противоречие с леммой 15.

Итак, для любой части $G_{i,i+1}$ $\quad |T \cap G_{i,i+1}| \leq 1$. Это означает, что если $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$, то $|T \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1})| = 1$ и $T \cap Q_{i,i+1} = \varnothing$. Кроме того, если $T \cap \mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \{u\}$, то $\{p, u\} \in \mathrm{Part}(\{T, Q_{i,i+1}\})$ по следствию 2, то есть множество T отделяет p от всех остальных вершин части $G_{i,i+1}$. Поскольку это верно для всех непустых частей, множество T отделяет p от остальных вершин графа G. □

3.4 Особые ромашки. Окрестность ромашки

Определение 19. Назовем ромашку $F = (p; q_1, \ldots, q_m)$ *особой*, если $d(p) = 3$ и неособой в противном случае. *Окрестностью* центра особой ромашки назовем множество $T(p)$, состоящее из вершин смежных с p.

Заметим, что если p — центр особой ромашки, то $T(p) \in \mathfrak{R}_3(G)$. При этом по лемме 20 внутренность любой непустой части $\mathrm{Part}(F)$ содержит ровно одну вершину множества $T(p)$, а ее граница не пересекается с $T(p)$.

Определение 20. Пусть $F = (p; q_1, \ldots, q_m)$ — максимальная невырожденная ромашка и $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(F)$.

Если ромашка F особая и часть $G_{i,i+1}$ непуста, то обозначим через $u_{i,i+1}$ единственную вершину ее пересечения с $T(p)$.

Если ромашка F неособая, в части $G_{i,i+1}$ есть ровно одна вершина, смежная с p, и $\mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \mathrm{Int}(G_{i+1,i+2}) = \varnothing$, то также обозначим единственную вершину $G_{i,i+1}$, смежную с p, через $u_{i,i+1}$.

Во всех остальных случаях будем считать, что $u_{i,i+1} = p$.

Множество $\mathrm{Nb}(F) = V(F) \cup \{u_{1,2}, u_{2,3}, \ldots, u_{m,1}\}$ мы будем называть *окрестностью* ромашки F.

Замечание 15. Заметим, что если $u_{i,i+1} \neq p$, то множество $M_{i,i+1}$ может быть дополнено ребром $pu_{i,i+1}$, то есть $pu_{i,i+1} \in M^*_{i,i+1}$.

Если F — максимальная невырожденная особая ромашка, то по определению $\mathrm{Nb}(F) = V(F) \cup T(p)$.

Если же F — максимальная невырожденная неособая ромашка и $u_{i,i+1} \neq p$, то по определению $\mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \mathrm{Int}(G_{i+1,i+2}) = \varnothing$, следовательно, $M^*_{i,i+1} = \{q_{i-1}q_i, pu_{i,i+1}, q_{i+2}q_{i+1}\} \in \mathfrak{M}_3(G)$. Обратно, если $M^*_{i,i+1} \in \mathfrak{M}_3(G)$, то очевидно, что $u_{i,i+1} \neq p$.

Определение 21. Пусть $u_{i,i+1} \neq p$. Введем обозначения $M'_{i,i+1} = M^*_{i,i+1}$ и $Q'_{i,i+1} = \{q_i, u_{i,i+1}, q_{i+1}\}$. При $u_{i,i+1} = p$ положим $M'_{i,i+1} = M_{i,i+1}$ и $Q'_{i,i+1} = Q_{i,i+1}$.

Будем считать, что $G'_{i,i+1} = G_{i,i+1} \setminus \{p\}$, если либо $u_{i,i+1} \neq p$, либо $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \varnothing$ и как минимум одна из вершин $u_{i-1,i}$ и $u_{i+1,i+2}$ не совпадает с p. Во всех остальных случаях положим $G'_{i,i+1} = G_{i,i+1}$.

Если $M'_{i,i+1} \in \mathfrak{M}(G)$, то обозначим через $\mathrm{Nb}(G'_{i,i+1})$ окрестность $G'_{i,i+1}$ как части $M'_{i,i+1}$-разбиения. Разрез $M'_{i,i+1}$ мы будем называть *граничным разрезом* части $G'_{i,i+1}$. При $M'_{i,i+1} \in \mathfrak{M}_0(G)$ положим $\mathrm{Nb}(G'_{i,i+1}) = G'_{i,i+1}$.

При $u_{i,i+1} \neq p$ легко видеть, что $G'_{i,i+1}$ — часть из $\mathrm{Part}(M'_{i,i+1})$, содержащаяся в $G_{i,i+1}$ и $\mathrm{Int}(G'_{i,i+1}) = \mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \setminus \{u_{i,i+1}\}$.

Лемма 21. *Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ — максимальная невырожденная ромашка. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Если $T \in \mathfrak{R}_3(G)$ и $T \subset \mathrm{Nb}(F)$, то либо $T \in \mathfrak{R}(F)$, либо T содержится в $M'_{i,i+1}$ для некоторого i, либо $T = T(p)$ (последнее возможно только если ромашка F особая). Все описанные выше множества, кроме множеств вида $Q'_{i,i+1}$, заведомо являются разделяющими, делят граф G ровно на две части и разделяют множество $\mathrm{Nb}(F)$. Множества вида $Q'_{i,i+1}$ не разделяют $\mathrm{Nb}(F)$ и являются разделяющими тогда и только тогда, когда $\mathrm{Int}(G'_{i,i+1}) \neq \varnothing$.*

2) *Если множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ разделяет $\mathrm{Nb}(F)$ и $S \not\subset \mathrm{Nb}(F)$, то $|\mathrm{Part}(S)| = 2$ и S отделяет одну из вершин множества $\mathrm{Nb}(F)$ от остальных вершин этого множества. Отделяемая множеством S вершина не может быть центром ромашки.*

Доказательство. 1) Если $T \subset V(F)$, то, по следствию 9, T является множеством ромашки F. Тогда либо $T \in \mathfrak{R}(F)$, либо T является границей непустой части $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(F)$ и содержится в $M'_{i,i+1}$.

Пусть $T \not\subset V(F)$. Тогда по определению окрестности ромашки существует такое i, что $u_{i,i+1} \in T$ и $u_{i,i+1} \neq p$. Заметим, что если T не разделяет $V(F)$, то $T \subset G_{i,i+1} \cap \mathrm{Nb}(F) = \{p, q_i, q_{i+1}, u_{i,i+1}\} \subset V(M'_{i,i+1})$. По следствию 10 это означает, что T содержится в $M'_{i,i+1}$.

Осталось рассмотреть ситуацию, когда $T \not\subset V(F)$, и T разделяет $V(F)$. По лемме 18 далее возможны следующие 3 случая.

1. T отделяет p от остальных вершин $V(F)$. Тогда по лемме 20 ромашка F особая и $T = T(p)$.

2. T отделяет один из лепестков ромашки F от остальных вершин $V(F)$. Так как $T \cap I(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$, то этот лепесток — q_i или q_{i+1}. Тогда по лемме 19 две вершины множества T лежат в $G_{i,i+1} \cap \mathrm{Nb}(F) \subset V(M'_{i,i+1})$, а третья принадлежит соседней с $G_{i,i+1}$ пустой части $\mathrm{Part}(F)$, то есть также принадлежит $V(M'_{i,i+1})$. Таким образом, $T \subset V(M'_{i,i+1})$, следовательно, T содержится в $M'_{i,i+1}$.

3. T отделяет лепестки q_i и q_{i+1} от остальных вершин $V(F)$. Тогда, по лемме 18, $\mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \mathrm{Int}(G_{i+1,i+2}) = \varnothing$ и $T = \{q_{i-1}, u_{i,i+1}, q_{i+2}\} \subset M'_{i,i+1}$.

По свойствам ромашки любое ее внутреннее множество является разделяющим, делит граф G ровно на две части и разделяет $V(F)$ (а следовательно и $\mathrm{Nb}(F)$). По лемме 6 то же самое верно и для любого внутреннего множества разреза $M'_{i,i+1}$, а по лемме 20 — для множества $T(P)$ (если ромашка особая). Если $Q_{i,i+1} \neq Q'_{i,i+1}$, то $Q_{i,i+1}$, очевидно, является разделяющим множеством, отделяющим $u_{i,i+1}$ от остальных вершин множества $\mathrm{Nb}(F)$ и, следовательно, делит граф G ровно на две части. Все оставшиеся множества имеют вид $Q'_{i,i+1}$. Очевидно, что множество $Q'_{i,i+1}$ не разделяет $\mathrm{Nb}(F)$. Это множество является разделяющим тогда и только тогда, когда $\mathrm{Int}(G'_{i,i+1}) \neq \varnothing$.

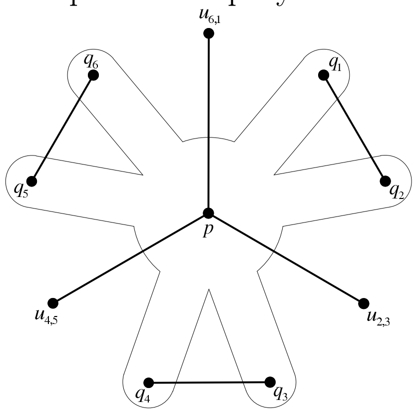
2) Если S разделяет $V(F)$, то, по лемме 4, $p \notin S$. Далее, по лемме 18, S делит граф ровно на две части и отделяет не более двух вершин множества $V(F)$ от остальных вершин этого множества. При этом, если отделяются две вершины, то $S \subset \mathrm{Nb}(F)$, что невозможно по условию. Кроме того, по лемме 20 единственное 3-разделяющее множество, которое может отделять p от остальных вершин множества $V(F)$ — это $T(p)$. Но $T(p) \subset \mathrm{Nb}(F)$.

Таким образом, S отделяет один из лепестков ромашки от остальных вершин множества $V(F)$. При этом, поскольку $p \notin S$, все вершины вида $u_{i,i+1}$ лежат в той же компоненте связности графа $G - S$, что и p. То есть S отделяет один из лепестков ромашки от остальных вершин множества $\mathrm{Nb}(F)$.

Если же S не разделяет $V(F)$, то S независимо со всеми множествами ромашки F, то есть S содержится в одной из частей $G_{i,i+1}$. Но тогда S может отделить от остальных вершин множества $\mathrm{Nb}(F)$ только вершину $u_{i,i+1}$, причем это возможно только в случае, когда $u_{i,i+1} \neq p$. Более того, по лемме 2, S не разделяет $G_{i+1,i}$. В этом случае очевидно, что $p \in T$, и любая часть $\mathrm{Part}(S)$, содержащаяся в $G_{i,i+1}$, содержит вершину смежную с p. Но, поскольку $u_{i,i+1} \neq p$, такая вершина в $G_{i,i+1}$ только одна, следовательно в $G_{i,i+1}$ может содержаться только одна часть $\mathrm{Part}(S)$. С другой стороны, по лемме 2, S не разделяет $G_{i+1,i}$, следовательно, часть $\mathrm{Part}(S)$, не содержащаяся в $G_{i,i+1}$, также может быть только одна. Таким образом, S делит граф G ровно на две части. $\square$

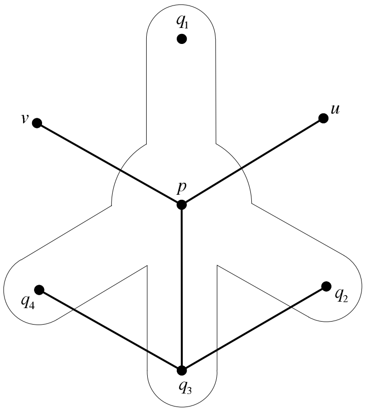
Замечание 16. Опишем более детально то, как может выглядеть невырожденная особая ромашка $F(p; q_1, \ldots, q_m)$. Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть в $\mathrm{Part}(F)$ три непустые части. Тогда $T(p)$ содержит по вершине во внутренности каждой из этих частей, следовательно, центр p не смежен ни с одним из лепестков F. Отсюда по замечанию 2 следует, что две соседние части $\mathrm{Part}(F)$ не могут быть пустыми. Таким образом, в $\mathrm{Part}(F)$ от четырех до шести частей. Особая ромашка с шестью частями изображена на рисунке.

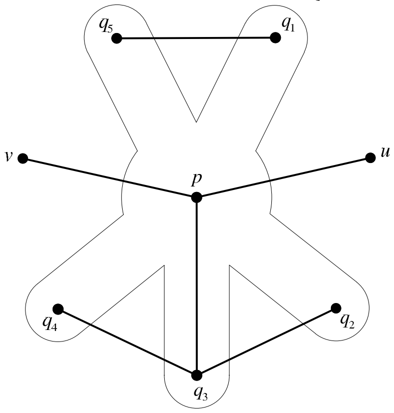


2) Пусть в $\mathrm{Part}(F)$ две непустые части, тогда внутренность каждой из них содержит ровно по одной вершине множества $T(p)$, а третья вершина $T(p)$ — лепесток q_i, не входящий в непустые части $\mathrm{Part}(F)$. То есть части $G_{i-1,i}$ и $G_{i,i+1}$ пусты. Поскольку все вершины, смежные с p, лежат в $T(p)$, в $\mathrm{Part}(F)$ кроме четырех указанных частей может быть только одна пустая часть, причем соседняя с двумя непустыми. Таким образом, в $\mathrm{Part}(F)$ четыре или пять частей.

Если частей четыре, то их можно занумеровать так, что $G_{1,2} \ni u$ и $G_{4,1} \ni v$ — непустые, $G_{2,3}$ и $G_{3,4}$ — пустые, а $T(p) = \{u, v, q_3\}$. Отметим, что в этом случае $F' = (q_3; q_1, u, p, v)$ — ромашка точно такого же типа, ее центр q_3 от остальных вершин графа отделяется множеством $\{q_2, p, q_4\}$. При этом легко видеть, что $\mathrm{Nb}(F) = \mathrm{Nb}(F')$.



Если в $\mathrm{Part}(F)$ пять частей, то их можно занумеровать так, что $G_{1,2} \ni u$ и $G_{4,5} \ni v$ — непустые, $G_{2,3}$, $G_{3,4}$ и $G_{5,1}$— пустые, а $T(p) = \{u, v, q_3\}$. Отметим, что в этом случае $F' = (q_3; q_1, u, p, v, q_5)$ — ромашка точно такого же типа, ее центр q_3 от остальных вершин графа отделяется множеством $\{q_2, p, q_4\}$ и при этом $\mathrm{Nb}(F) = \mathrm{Nb}(F')$.



3) В $\mathrm{Part}(F)$ не может быть ровно одна непустая часть. Действительно, в противном случае внутренность этой части содержит одну вершину $u \in T(p)$, а две другие вершины множества $T(p)$ — лепестки ромашки. Остальные части $\mathrm{Part}(F)$ пусты и их не менее трех. По замечанию 2 общий лепесток двух соседних пустых частей смежен с центром p, и, следовательно, входит в $T(p)$. Это означает, что в $\mathrm{Part}(F)$ ровно три пустые части — пусть это $G_{1,2}$, $G_{2,3}$ и $G_{3,4}$. Тогда нетрудно понять, что $\{up, q_1q_2, q_4q_3\} \in \mathfrak{M}_3(G)$ — разрез, содержащий ромашку F. Противоречие.

Лемма 22. *Пусть F — особая невырожденная ромашка. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Для любой части $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(F)$ $\quad G'_{i,i+1} \neq G_{i,i+1}$.*

2) *Множество $T(p)$ состоит из всех вершин $u_{i,i+1}$, не совпадающих с p, и всех вершин q_j, для которых $\mathrm{Int}(G_{j-1,j}) = \mathrm{Int}(G_{j,j+1}) = \varnothing$,*

$u_{j-2,j-1} \neq p$ *и* $u_{j+1,j+2} \neq p$.

Доказательство. 1) Заметим, что в особой ромашке $u_{i,i+1} \neq p$ (то есть $G'_{i,i+1} \neq G_{i,i+1}$) тогда и только тогда, когда $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$. Кроме того, из классификации особых ромашек, приведенной в замечании 16, видно, что у каждой пустой части $\mathrm{Part}(F)$ есть непустой сосед. Следовательно, для таких частей также $G'_{i,i+1} \neq G_{i,i+1}$.

2) Заметим, что $T(p)$ состоит из отличных от p вершин $u_{i,i+1}$ и всех лепестков q_i, принадлежащих двум пустым частям. Из замечания 16 видно, что три пустые части особой ромашки не могут идти подряд, следовательно, $q_i \in T(p)$ означает, что $I(G_{i-1,i}) = I(G_{i,i+1}) = \varnothing$, $I(G_{i-2,i-1}) \neq \varnothing$ и $I(G_{i+1,i+2}) \neq \varnothing$. Тогда по пнуткту 1 мы имеем $u_{i-2,i-1} \neq p$ и $u_{i+1,i+2} \neq p$. $\square$

3.5 Связь тройных разрезов с другими основными структурами

Ось тройного разреза делит граф на три части и, следовательно, не может быть внутренним множеством разреза или ромашки. Таким образом, множество вершин тройного разреза не может содержаться в множестве вершин разреза или ромашки.

Более того, как следует из лемм 16 и 21, ось тройного комплекса не может также разделять множество вершин нетривиального разреза или окрестность ромашки. Следовательно, если множество вершин нетривиального разреза или ромашки содержится в множестве вершин тройного разреза (или в его окрестности), то оно содержится и в множестве вершин одного из образующих его (или его окрестность) разрезов. Заметим также, что ребра, соединяющие вершину степени 3 оси тройного разреза с ее окрестностью, очевидно, образуют тривиальный разрез, также содержащийся в тройном разрезе.

Определение 22. Будем говорить, что разрез или ромашка *содержатся* в тройном разрезе (окрестности тройного разреза), если их множества вершин содержатся в множестве вершин (окрестности) тройного разреза.

4 Комплексы

Мы представим набор $\mathfrak{R}_3(G)$, как объединение нескольких поднаборов — структурных единиц разбиения, строящихся на основе описанных выше основных структур. Эти поднаборы мы будем называть *комплексами*.

В данном разделе мы перечислим все виды комплексов, опишем все 3-разделяющие множества каждого комплекса и разбиение графа множествами одного комплекса. Далее с помощью теоремы о разбиении [2] мы построим гипердерево взаимного расположения множеств различных комплексов. В результате получится полная картина взаимного расположения трехвершинных разделяющих множеств в произвольном трехсвязном графе.

Определение 23. Назовем *одиночными* множества из $\mathfrak{R}_3(G)$, не зависимые ни с какими множествами из $\mathfrak{R}_3(G)$. Остальные множества из $\mathfrak{R}_3(G)$ назовем *неодиночными.* Обозначим через $\mathfrak{O}$ набор, состоящий из всех одиночных множеств.

Каждое одиночное множество будем считать комплексом. Опишем остальные типы комплексов.

4.1 Тройные комплексы

Определение 24. Для любого тройного разреза F назовем *тройным комплексом* $\mathfrak{C}(F)$ набор, состоящий из всех множеств $\mathfrak{R}_3(G)$, содержащихся в $\mathrm{Nb}(F)$, кроме границ окрестности F. Ось F и границы окрестности F мы будем называть соответственно *осью* и *границами* тройного комплекса.

Пусть $F = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ — тройной разрез с осью S, $\mathrm{Nb}(F) = V(M_1') \cup V(M_2') \cup V(M_3')$ — его окрестность. Пусть $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, A_2, A_3\}$, а части $B_i \in \mathrm{Part}(M_i)$ и $B_i' \in \mathrm{Part}(M_i')$ таковы, что $B_i' \subset B_i \subset A_i$. (Подробнее определения всех этих частей даны в разделе 2.3.)

Как следует из леммы 12, тройной комплекс $\mathfrak{C}(F)$ состоит из S, всех тривиальных разделяющих множеств подчиненных S (их не более трех) и внутренних множеств разрезов M_1', M_2', M_3'.

Опишем теперь все части $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$. Если все разрезы M_i' нетривиальны, то $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ состоит из малых частей вида $\{x, x_i\}$ (где $x \in S$, а $xx_i \in M_i'$) и нормальных частей B_i'.

Если разрез M_i' тривиален, то $|B_i'| = 1$. Пусть $B_i' = \{y\}$. Тогда множество B_i состоит из вершины y и тех вершин множества S, степень которых больше трех. Если таких вершин нет, то все содержащиеся в A_i части $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ имеют вид $\{x, y\}$, где $x \in S$.

Пусть в множестве S есть вершины степени более 3. Тогда $B_i \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$, причем часть B_i является малой, если ровно две вершины множества S имеют степень 3, и является нормальной, если такая вершина одна.

Из леммы 17 следует, что для любого множества $R \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{C}(F)$ существует единственная непустая часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ такая, что $R \subset \mathrm{Nb}(A)$ и либо $R = \mathrm{Bound}(A)$, либо $R \cap \mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$.

4.2 Комплекс невырожденной ромашки

Пусть в графе G существует такая ромашка F, что в $\mathrm{Part}(F)$ нет непустых частей. Тогда все вершины графа G являются вершинами ромашки, каждый лепесток F смежен с центром и двумя соседними лепестками. В этом случае все 3-разделяющие множества графа G — это множества ромашки F. Отметим также, что в этом случае граф G является "колесом" (см. [8]). В дальнейшем не будем возвращаться к этому тривиальному случаю и будем считать, что для любой ромашки F в $\mathrm{Part}(F)$ есть непустая часть.

Объектом изучения в этом разделе будет максимальная невырожденная ромашка $F = (p; q_1, q_2, \ldots, q_m)$. Как было показано выше, возможны два принциаиально разных случая: ромашка F может быть особой или неособой.

Определение 25. Определим *комплекс* $\mathfrak{C}(F)$ ромашки F, как набор, состоящий из всех множеств $\mathfrak{R}_3(G)$ на вершинах $\mathrm{Nb}(F)$, разделяющих множество $\mathrm{Nb}(F)$. *Границами* комплекса $\mathfrak{C}(F)$ мы будем называть границы всех нормальных частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$.

Из леммы 21 следует, что $\mathfrak{C}(F)$ состоит из множеств $\mathfrak{R}(F)$, множеств, содержащихся в разрезах $M'_{i,i+1}$ и не совпадающих с $Q'_{i,i+1}$ (здесь достаточно рассмотреть только те i, для которых $u_{i,i+1} \neq p$) и, возможно, множества $T(p)$ (в случае, если ромашка F особая). Границы комплекса невырожденной ромашки в комплекс не входят!

Лемма 23. *Пусть $G_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(\mathfrak{R}(F))$ и $G'_{i,i+1} \neq G_{i,i+1}$. Тогда существует множество $S_{i,i+1} \in \mathfrak{C}(F)$, отделяющее p от $G'_{i,i+1}$, причем $S_{i,i+1} \cap G_{i,i+1} = \{u_{i,i+1}\}$ при $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$ и $S_{i,i+1} \cap G_{i,i+1}$ состоит из одного из лепестков q_i или q_{i+1} в противном случае.*

Доказательство. Если $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \varnothing$, то, поскольку $G'_{i,i+1} \neq G_{i,i+1}$, как минимум одна из вершин $u_{i-1,i}$ и $u_{i+1,i+2}$ (не умаляя общности, пусть это $u_{i-1,i}$) не совпадает с p и нам подходит $S_{i,i+1} = \{q_{i-1}, u_{i-1,i}, q_{i+1}\}$. Если же $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$, то нам подходит $S_{i,i+1} = T(p)$ для особой и $S_{i,i+1} = \{q_{i-1}, u_{i,i+1}, q_{i+2}\}$ для неособой ромашки. ☐

Для того, чтобы описать части, на которые разбивает граф комплекс ромашки, нам потребуется обобщение понятия окрестности центра на случай неособой ромашки. Для этого мы воспользуемся свойством окрестности центра особой ромашки, доказанном в пункте 2 леммы 22.

Определение 26. *Окрестностью* центра ромашки F назовем множество $T(p)$, состоящее из всех вершин $u_{i,i+1}$, не совпадающих с p, и всех вершин q_j, для которых $\mathrm{Int}(G_{j-1,j}) = \mathrm{Int}(G_{j,j+1}) = \varnothing$, $u_{j-2,j-1} \neq p$ и $u_{j+1,j+2} \neq p$.

Лемма 24. *Множество* $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ *состоит из всех частей вида* $G'_{i,i+1}$ *и малых частей вида* $\{p, x\}$*, где* $x \in T(p)$*. Часть* $G'_{i,i+1}$ *является малой тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \varnothing$ *и как минимум одна из вершин* $u_{i-1,i}$ *и* $u_{i+1,i+2}$ *не совпадает с* p*. Кроме того, если часть* $G'_{i,i+1}$ *нормальна, то* $\mathrm{Bound}(G'_{i,i+1}) = Q'_{i,i+1}$.

Доказательство. По определению $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}(F)) = \{G_{1,2}, G_{2,3}, \dots, G_{m,1}\}$. Посмотрим, как могут разделять эти части другие множества из $\mathfrak{C}(F)$.

Сначала докажем, что $G'_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ для всех i. Заметим, что если $G'_{i,i+1} \neq G_{i,i+1}$, то по лемме 23 существует множество $S_{i,i+1} \in \mathfrak{C}(F)$, отделяющее p от $G'_{i,i+1}$. Таким образом, нам нужно доказать, что ни одно множество из $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ не может разделять $G'_{i,i+1}$. Для этого рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $G'_{i,i+1} = G_{i,i+1}$. Тогда по лемме 22 ромашка F неособая.

1.1. Пусть $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \varnothing$. Тогда $u_{i-1,i} = u_{i+1,i+2} = p$ и q_i смежна с q_{i+1}. Следовательно, множество T, разделяющее $G'_{i,i+1}$, должно отделять p от $\{q_i, q_{i+1}\}$. Пусть, не умаляя общности, $q_i \notin T$. Тогда, по леммам 18 и 19, $T \cap \mathrm{Int}(G_{i-1,i}) \neq \varnothing$, откуда $T \notin \mathfrak{C}(F)$ так как $u_{i-1,i} = p$.

1.2. Пусть $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$. Тогда, поскольку $u_{i,i+1} = p$, ни одно множество из $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ не пересекается с $\mathrm{Int}(G_{i,i+1})$ и не совпадает с $Q_{i,i+1}$. При этом, $G_{i,i+1}$ является объединением нескольких частей из $\mathrm{Part}(Q_{i,i+1})$. Следовательно, по лемме 2, ни одно множество из $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ не может разделить $G_{i,i+1} = G'_{i,i+1}$.

2. Пусть $G'_{i,i+1} \neq G_{i,i+1}$. Случай $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \varnothing$ очевиден, поскольку в этом случае вершины q_i и q_{i+1} смежны и никакое множество не может их разделить. Отметим, что это единственный случай, когда часть $G'_{i,i+1}$ является малой. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$. Он распадается на следующие подслучаи.

2.1. Если $\mathrm{Int}(G'_{i,i+1}) \neq \varnothing$, то часть $G'_{i,i+1}$ является объединением нескольких частей $\mathrm{Part}(Q'_{i,i+1})$. Тогда, поскольку все множества $\mathfrak{C}(F)$ не пересекаются с $\mathrm{Int}(G'_{i,i+1})$ и не совпадают с $Q'_{i,i+1}$, из леммы 2 следует, что ни одно из множеств $\mathfrak{C}(F)$ не разделяет $G'_{i,i+1}$.

2.2. Если же $\mathrm{Int}(G'_{i,i+1}) = \varnothing$, то $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \{u_{i,i+1}\}$, то есть вершина $u_{i,i+1}$ смежна с вершинами q_i и q_{i+1}. Далее, по лемме 4, существует путь из q_i в q_{i+1}, не проходящий через $u_{i,i+1}$, внутренние вершины которого лежат в $\mathrm{Int}(G_{i,i+1})$. Это означает, что вершины q_i и q_{i+1} также смежны и ни одно множество не может разделить часть $G'_{i,i+1} = \{q_i, u_{i,i+1}, q_{i+1}\}$.

Итак, все множества вида $G'_{i,i+1}$ принадлежат $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$. Из определения $G'_{i,i+1}$ и $Q'_{i,i+1}$ очевидно следует, что $\mathrm{Bound}(G'_{i,i+1}) = Q'_{i,i+1}$ если часть $G'_{i,i+1}$ нормальна.

Заметим, что все множества вида $\{p, x\}$, где $x \in T(p)$, также принадлежат $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$. Действительно, p и x смежны и $\{p, x\}$ можно отделить от остальных вершин графа G несколькими множествами из $\mathfrak{C}(F)$. Если $x = u_{i,i+1}$, то подойдут множества $Q_{i,i+1}$ и $S_{i,i+1}$ (множество, построенное в лемме 23), а если $x = q_j$, то $Q_{j-1,j+1}$, $S_{i-1,i}$ и $S_{i,i+1}$.

Докажем, что других частей нет. Пусть $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ — любая другая часть. Очевидно, что H содержится в одном из множеств $G_{i,i+1}$. При этом $H \not\subset G'_{i,i+1}$, следовательно, $G'_{i,i+1} \neq G_{i,i+1}$ и $p \in H$.

Если $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \neq \varnothing$, то $u_{i,i+1} \neq p$ и $H = \{p, u_{i,i+1}\}$, поскольку по лемме 23 существует множество $S_{i,i+1} \in \mathfrak{C}(F)$, отделяющее p от всех остальных вершин множества $G_{i,i+1}$.

Если же $\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) = \varnothing$, то либо $H = \{p, q_i\}$, либо $H = \{p, q_{i+1}\}$. Не умаляя общности можно считать, что $H = \{p, q_i\}$. Тогда $H \subset G_{i-1,i}$, следовательно, $\mathrm{Int}(G_{i-1,i}) = \varnothing$ (иначе применим рассуждение из предыдущего случая), то есть p и q_i смежны. Далее, по лемме 23 существуют множества $S_{i-1,i}$ и $S_{i,i+1}$, отделяющие p от q_{i-1} и q_{i+1} соответственно. Тогда, по леммам 18 и 19, $S_{i-1,i} \cap \mathrm{Int}(G_{i-2,i-1}) \neq \varnothing$ и $S_{i,i+1} \cap \mathrm{Int}(G_{i+1,i+2}) \neq \varnothing$, следовательно $u_{i-2,i-1} \neq p$ и $u_{i+1,i+2} \neq p$. Это означает, что $q_i \in T(p)$. $\square$

Для каждой нормальной части $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ определим ее окрестность.

Определение 27. Окрестностью нормальной части $G'_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(F)$ назовем множество $\mathrm{Nb}(G'_{i,i+1}) = G'_{i,i+1} \cup V(M'_{i,i+1})$.

Замечание 17. Если $M'_{i,i+1} = Q_{i,i+1}$, то $\mathrm{Nb}(G'_{i,i+1}) = G'_{i,i+1} = G_{i,i+1}$. Во всех остальных случаях нормальная часть $G'_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ имеет граничный разрез $M'_{i,i+1}$. Тогда окрестности $G'_{i,i+1}$ как части $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ и как части $\mathrm{Part}(M'_{i,i+1})$ совпадают.

Теорема 3. *Пусть $F = (p; q_1, \dots, q_m)$ — максимальная невырожденная ромашка, $R \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{C}(F)$. Тогда существует единственная непустая часть $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ такая, что $R \subset \mathrm{Nb}(H)$ и либо $R = \mathrm{Bound}(H)$, либо $R \cap \mathrm{Int}(H) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Если $R \subset \mathrm{Nb}(F)$, то по леммам 21 и 24 множество R является границей непустой части $H \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$. Тогда $R \subset H \subset \mathrm{Nb}(H)$. Очевидно, что граница непустой части $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$

не может быть границей другой непустой части $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ или пересекаться с ее внутренностью.

Пусть $R \not\subset \mathrm{Nb}(F)$. Тогда существует часть $G'_{i,i+1} \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ такая, что $R \cap \mathrm{Int}(G'_{i,i+1}) \neq \varnothing$. Докажем, что $R \subset \mathrm{Nb}(G'_{i,i+1})$. Это очевидно в случае, если R независимо с $Q'_{i,i+1}$, поскольку тогда $R \subset G'_{i,i+1}$. То есть достаточно рассмотреть случай, когда эти множества зависимы. В этом случае по лемме 21 множество R отделяет ровно одну вершину $x \in \mathrm{Nb}(F)$ от остальных вершин $\mathrm{Nb}(F)$. Очевидно, что $x \in Q'_{i,i+1} = \{q_i, u_{i,i+1}, q_{i+1}\}$. Далее возможны следующие два случая.

1. Если $x = q_i$ (случай q_{i+1} аналогичен), то по лемме 19 множество R состоит из двух вершин части $G_{i,i+1} \subset \mathrm{Nb}(G'_{i,i+1})$ и вершины $q_{i-1} \in \mathrm{Nb}(G'_{i,i+1})$.

2. Если же $x = u_{i,i+1}$, то очевидно $u_{i,i+1} \neq p$. Поскольку $p \in \mathrm{Nb}(F)$ и p смежна с $u_{i,i+1}$, то $p \in R$. Тогда R независимо с $Q_{i,i+1}$ (иначе по лемме 4 ромашка F не максимальна). Это означает, что $R \subset G_{i,i+1} \subset \mathrm{Nb}(G'_{i,i+1})$.

Осталось заметить, что окрестности других частей $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(F))$ не пересекаются с $\mathrm{Int}(G_{i,i+1})$ и, следовательно, не содержат R. $\square$

4.3 Комплекс большого разреза

Определение 28. 1) Назовем нетривиальный разрез $M \in \mathfrak{M}_3$ *большим*, если $V(M)$ не содержится в множестве вершин никакого тройного разреза и не содержится в окрестности невырожденной ромашки.

2) Определим *комплекс* $\mathfrak{C}(M)$ большого разреза M как набор, состоящий из всех множеств, содержащихся в $V(M)$, кроме границ T_1^M и T_2^M, которые мы назовем *границами* $\mathfrak{C}(M)$.

По следствию 10 любое множество $R \in \mathfrak{C}(M)$ содержится в разрезе M (то есть, содержит по одной вершине из каждого входящего в M ребра). Все такие множества, кроме границ разреза M, входят в $\mathfrak{C}(M)$. Очевидно, что $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(M))$ состоит из нормальных частей G_1^M и G_2^M, а также малых частей вида $\{x_1, x_2\}$, где $x_1x_2 \in M$. Будем считать, что окрестности G_i^M как части $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(M))$ и как части $\mathrm{Part}(M)$ совпадают.

Из леммы 16 следует, что для любого множества $R \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathfrak{C}(M)$ существует единственная непустая часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{C}(M))$ такая, что $R \subset \mathrm{Nb}(A)$ и либо $R = \mathrm{Bound}(A)$, либо $R \cap \mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$.

Пусть $M = \{a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2\}$ — большой разрез. Как было доказано выше, существует шесть четырехлепестковых ромашек с вершинами из $V(M)$ (это $(b_1; a_1, a_2, c_2, c_1)$ и еще пять аналогичных). Поскольку разрез M не может содержаться в окрестности невырожденной ромашки, все эти ромашки являются максимальными и, естественно, вырожденными.

4.4 Малые комплексы

Определение 29. Тройные комплексы, комплексы невырожденной ромашки и комплексы большого разреза мы будем называть *большими* комплексами. Все разделяющие множества, не вошедшие ни в один большой комплекс, мы разобьем на комплексы, состоящие из одного или двух множеств. Такие комплексы мы будем называть *малыми.*

Множеством вершин любого (большого или малого) комплекса $\mathcal{C}$ назовем множество $V(\mathcal{C})$, являющееся объединением всех входящих в $\mathcal{C}$ разделяющих множеств.

Очевидно, что каждое одиночное множество образует малый комплекс. Далее мы опишим остальные малые комплексы.

Пусть $T \in \mathfrak{R}_3(G)$ — неодиночное разделяющее множество, не вошедшее ни в один большой комплекс. Заметим, что тогда $|\mathrm{Part}(T)| = 2$. Действительно, в противном случае по лемме 9 любое 3-разделяющее множество, зависимое с T, подчинено ему, то есть T является осью тройного комплекса. Кроме того, если $S \in \mathfrak{R}_3(G)$ зависимо с T, то $|\mathrm{Part}(S)| = 2$ (иначе T подчинено S и лежит в тройном комплексе с осью S) и $T \cap S = \varnothing$ (иначе множества T и S порождают ромашку).

Лемма 25. *Пусть разделяющее множество $T = \{x, y, z\}$ таково, что $|\mathrm{Part}(T)| = 2$ и T можно дополнить каждым из ребер xx_1 и yy_1, причем эти ребра лежат в разных частях $\mathrm{Part}(T)$. Тогда T можно дополнить обоими этими ребрами одновременно (т. е. $\{xx_1, y_1y, z\} \in \mathfrak{M}_2(G)$) в том и только в том случае, когда вершины x и y не смежны.*

Доказательство. Пусть вершина x_1 лежит в компоненте связности H графа $G-T$. По лемме 5, x_1 — единственная вершина подграфа H, смежная с x. Далее рассмотрим разрез $M_y = \{x, y_1y, z\} \in \mathfrak{M}_1(G)$. Очевидно, что $V(H) \cup \{y\}$ является множеством вершин одной из компонент связности графа $G - M_y$. По лемме 5 разрез M_y можно дополнить ребром xx_1 тогда и только тогда, когда x_1 — единственная вершина множества $V(H) \cup \{y\}$, смежная с x. А это равносильно тому, что x и y не смежны. □

Лемма 26. *Пусть $T = \{x, y, z\}$ — неодиночное разделяющее множество, не вошедшее ни в один большой комплекс. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Для любого множества $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, зависимого с T, ровно одна из частей* $\mathrm{Part}(\{S, T\})$ *является малой. Этой части соответствует особое ребро, дополняющее множества S и T.*

2) *Все ребра, которыми можно дополнить множество T, лежат в одной и той же части* $\mathrm{Part}(T)$. *Более того, множество T можно дополнить всеми этими ребрами одновременно.*

Доказательство. 1) Как показано выше, $T \cap S = \varnothing$, то есть по следствию 2 хотя бы одна из частей $\mathrm{Part}(\{S, T\})$ является малой. Из того, что $\mathrm{Part}(T) = \mathrm{Part}(S) = 2$ очевидно следует, что такая часть ровно одна. По теореме 2 эта часть состоит из вершин особого ребра, которым можно дополнить множества S и T.

2) Заметим сначала, что множество T нельзя одновременно дополнить двумя ребрами, лежащими в разных частях $\mathrm{Part}(T)$. Действительно, в противном случае T является внутренним множеством некоторого разреза из $\mathfrak{M}_2(G)$, то есть принадлежит одному из больших комплексов.

Предположим теперь, что множество T можно дополнить каждым из ребер xx_1 и yy_1, причем эти ребра лежат в разных частях $\mathrm{Part}(T)$. Тогда по лемме 25 вершины x и y смежны. Рассмотрим множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, зависимое с T (такое множество существует так как T не одиночно). Мы знаем, что $T \cap S = \varnothing$, следовательно, S разделяет z и $\{x, y\}$. Тогда, как следует из части 1) настоящей леммы, множество T можно дополнить особым ребром zz_1. Не умаляя общности можно считать, что вершины y_1 и z_1 лежат в разных компонентах связности графа $G - T$. Тогда аналогично доказанному выше вершины y и z смежны и множество S не может разделять T. Противоречие.

Если же множество T можно дополнить ребрами xx_1 и xx_2, то по лемме 5 вершины x_1 и x_2 являются единственными смежными с x в каждой из двух компонент связности графа $G - T$. Тогда, поскольку $d(x) \geq 3$, вершина x должна быть смежна с какой-либо вершиной множества T и рассуждения аналогичные изложенным выше приводят нас к противоречию.

Таким образом, все ребра, которыми можно дополнить множество T, лежат в одной и той же части $\mathrm{Part}(T)$. Тогда из леммы 5 очевидно следует, что множество T можно дополнить всеми этими ребрами одновременно. $\square$

Теперь мы можем описать все виды малых комплексов, части на которые они разбивают граф и окрестности этих частей.

Определение 30. Для любого разреза $M = \{x_1x_2, y, z\}$, обе границы которого являются неодиночными разделяющими множествами, не вошедшими ни в один большой комплекс, определим комплекс $\mathfrak{C}(M)$ как набор состоящий из обеих границ M. Разрез M мы будем называть *малым*, а комплекс $\mathfrak{C}(M)$ — *комплексом малого разреза.*

Все остальные разделяющие множества, не вошедшие ни в большие комплексы ни в комплексы малых разрезов, будут образовывать комплексы, состоящие из одного единственного множества.

Легко видеть, что каждый комплекс малого разреза $M = \{x_1x_2, y, z\}$ делит G на три части: G_1^M, G_2^M и $\{x_1, x_2, y, z\}$. Вообще говоря, все эти части являются нормальными, однако часть $\{x_1, x_2, y, z\}$ разделяется множествами, зависимыми с границами M, так что в $\mathrm{Part}(\mathfrak{R}_3(G))$ ей соответствует малая часть $\{x_1, x_2\}$. Отметим также, что эта часть всегда пустая. Будем считать, что окрестности G_i^M как части $\mathrm{Part}(\mathfrak{C}(M))$ и как части $\mathrm{Part}(M)$ совпадают.

Определим также для каждого малого комплекса вида $\mathcal{C} = \{T\}$ окрестности частей $\mathcal{C}$-разбиения графа G. Если множество T одиночно, то для любой части $H \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$ положим $\mathrm{Nb}(H) = H$. В противном случае, пусть $\mathrm{Part}(\mathcal{C}) = \{H_1, H_2\}$. По лемме 26, все ребра, которыми можно дополнить множество T, содержатся в одной части $\mathrm{Part}(\mathcal{C})$ — пусть это часть H_1. Тогда положим $\mathrm{Nb}(H_1) = H_1$. Для того, чтобы определить окрестность части H_2 дополним множество T до максимального разреза M и назовем окрестностью части H_2 ее окрестность как части M-разбиения графа G (очевидно, что $H_2 \in \mathrm{Part}(M)$).

Из леммы 16 очевидно следует, что для любого малого комплекса $\mathcal{C}$ и любого множества $R \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathcal{C}$ существует единственная непустая часть $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$ такая, что $R \subset \mathrm{Nb}(A)$ и $R \cap \mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$.

Опишем более детально все малые комплексы.

Лемма 27. *Пусть $T = \{x, y, z\}$ — неодиночное разделяющее множество, не вошедшее ни в один большой комплекс. Тогда выполнется хотя бы одно из следующих трех утверждений.*

1° *Множество T тривиально.*

2° *Множество T является границей большого комплекса, причем все множества этого комплекса лежат в той же части $\mathrm{Part}(T)$, где и все ребра, которыми можно дополнить T.*

3° *Множество T можно дополнить ровно одним ребром (обозначим его xx_1), причем это ребро является особым и любое 3-разделяющее множество, зависимое с T, содержит x_1 и отделяет x от y и z.*

Доказательство. Поскольку множество T неодиночно, существует множество $S \in \mathfrak{R}_3(G)$, зависимое с T. Тогда по лемме 26 одна из частей $\mathrm{Part}(\{S, T\})$ является малой, и этой части соответствует особое ребро, дополняющее множества S и T. Не умаляя общности можно считать, что это ребро xx_1.

Далее рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть xx_1 — единственное ребро, которым можно дополнить T. Тогда для любого множества $R \in \mathfrak{R}_3(G)$, зависимого с T, $\{x, x_1\} \in \mathrm{Part}(\{R, T\})$. Следовательно, $x_1 \in R$ и R отделяет x от y и z. То есть в этом случае выполняется утверждение 3° данной леммы.

2. Пусть множество T можно дополнить ребром yx_1. Обозначим через H компоненту связности графа $G - T$, содержащую x_1. По лемме 26, множество T можно одновременно дополнить ребрами yx_1 и xx_1. Тогда по пункту 2 замечания 4 $H = \{x_1\}$ и множество T — тривиальное. В этом случае выполняется утверждение 1° данной леммы.

3. Пусть множество T можно дополнить ребром yy_1 (где $x_1 \neq y_1$). Тогда по лемме 26 множество T можно дополнить ребрами xx_1 и yy_1, то есть $M = \{xx_1, yy_1, z\} \in \mathfrak{M}_2(G)$. Внутренние множества разреза M порождают ромашку $(z; x, x_1, y_1, y)$, которая содержится в некотором большом комплексе $\mathcal{C}$. Тогда $T \subset V(\mathcal{C})$. Но по условию $T \notin \mathcal{C}$, следовательно, множество T является границей комплекса $\mathcal{C}$. Поскольку граница комплекса не может разделять множество его вершин, множество $V(\mathcal{C})$ содержится в той же части $\mathrm{Part}(T)$, где и вершины x_1 и y_1. То есть выполняется утверждение 2° данной леммы. $\square$

Замечание 18. 1) Утверждение 1° не может быть выполненно одновременно ни с одним из утверждений 2° или 3°.

2) Из доказательства леммы 27 видно, что если неодиночное 3-разделяющее множество, не вошедшее ни в один большой комплекс, можно дополнить ровно одним ребром, то для этого множества выполняется утверждение 3° леммы 27.

3) Границы тройного комплекса и комплекса большого разреза всегда можно дополнить ребром, лежащим в той же части, где и все вершины этого комплекса. Границу $Q'_{i,i+1}$ комплекса ромашки $\mathfrak{C}(F)$ нельзя дополнить таким ребром в единственном случае: если ромашка F неособая, $u_{i,i+1} = p$ и обе части $G_{i-1,i}$ и $G_{i+1,i+2}$ непусты. Легко видеть, что в этом случае множество $Q'_{i,i+1}$ одиночно.

Из этого следует, что если граница большого комплекса не является одиночным множеством и не лежит в другом большом комплексе, то ее нельзя дополнить ребром лежащим в части, отличной от той, что содержит все вершины данного комплекса.

В частности это означает, что множества, входящие в комплекс малого разреза не могут быть границами больших комплексов. Также они, очевидно, не могут быть тривиальными множествами и по определению не одиночны. Таким образом, каждое из множеств комплекса малого разреза $M = \{x_1x_2, y, z\}$ можно дополнить только ребром x_1x_2.

Лемма 28. *Пусть $T = \{x, y, z\}$ — неодиночное разделяющее множество, не вошедшее ни в один большой комплекс и не являющееся границей большого комплекса, причем T можно дополнить единственным ребром xx_1. Тогда множество $T_1 = \{x_1, y, z\}$ является разделяющим и выполнется одно из следующих двух утверждений.*

1° *Множество T_1 одиночно.*

2° *Множества T и T_1 образуют комплекс малого разреза.*

Доказательство. Множество T_1 может не быть разделяющим в единственном случае: если x_1 единственная вершина соответствующей компоненты связности графа $G - T$. Но тогда множество T тривиально и его можно дополнить также ребрами yx_1 и zx_1. Противоречие.

Итак, множество T_1 — разделяющее. Предположим, что оно не одиночно. Нам нужно доказать, что в этом случае множества T и T_1 образуют комплекс малого разреза, то есть что T_1 не входит ни в какой большой комплекс.

Заметим, что по лемме 27 ребро xx_1 является особым и любое 3-разделяющее множество зависимое с T содержит x_1 и отделяет x от y и z. Следовательно, это множество не может быть зависимо с T_1. Это означает, что любое 3-разделяющее множество зависимое с T_1 независимо с T.

Предположим теперь, что T_1 входит в большой комплекс $\mathcal{C}$. Тогда T_1 должно быть зависимо хотя бы с одним множеством $S \in \mathcal{C}$. Поскольку S зависимо с T_1, но независимо с T, оно должно содержать вершину x. Но тогда $T \in V(\mathcal{C})$, то есть T либо входит в $\mathcal{C}$, либо является его границей. Противоречие. $\square$

Следствие 12. *Одноэлементные комплексы образуют следующие разделяющие множества, не входящие в большие комплексы:*

1) *одиночные множества;*

2) *тривиальные множества;*

3) *границы больших комплексов;*

4) *множества, которые можно дополнить ровно одним ребром, причем другая граница получающегося разреза является одиночным разделяющим множеством.*

5 Взаимное расположение комплексов

В предыдущем разделе мы описали все виды комплексов и для каждого вида доказали некоторые свойства. Перечислим те из них, которые верны для всех видов комплексов.

Для любого комплекса $\mathcal{C}$ граница любой непустой части $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$ является 3-разделяющим множеством, которое не разделяет $V(\mathcal{C})$ (но может разделять A). Пусть $R = \mathrm{Bound}(A)$. Если $\mathcal{C}$ не состоит из одиночного множества, то в $\mathrm{Part}(R)$ есть ровно одна часть, не пересекающаяся с $\mathrm{Int}(A)$. Обозначим ее $\overline{A}$. В этом случае окрестность A строится следующим образом: множество R дополняется до разреза M всеми возможными ребрами, лежащими в $\overline{A}$, после чего через $\mathrm{Nb}(A)$ обозначается окрестность A как части $\mathrm{Part}(M)$. Отметим также, что если $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$ и $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_2)$ (такое возможно, например, если $\mathcal{C}_1$ — большой комплекс, а $\mathcal{C}_2 = \{R\}$, где R — одна из границ $\mathcal{C}_1$ и $|\mathrm{Part}(R)| = 2$), то окрестность A в обоих случаях получается одна и та же.

Определение 31. Для любого комплекса $\mathcal{C}$ мы будем говорить, что множество $T \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathcal{C}$ *относится* к непустой части $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$, если $T \subset \mathrm{Nb}(A)$ и либо $T = \mathrm{Bound}(A)$, либо $T \cap \mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$.

В предыдущем разделе было даказано, что для любого комплекса $\mathcal{C}$ любое множество $T \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathcal{C}$ относится ровно к одной непустой части $\mathrm{Part}(\mathcal{C})$.

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы показать что два множества, принадлежащие одному комплексу, не могут отноститься к разным частям разбиения графа другим комплексом.

Для этого нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 29. *Пусть $\mathcal{C}$ — комплекс, $T \in \mathfrak{R}_3(G) \setminus \mathcal{C}$ — множество, разделяющее $V(\mathcal{C})$, $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C})$ — часть, к которой относится множество T и $R = \mathrm{Bound}(A)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Множества R и T зависимы.*

2) *Множество T отделяет ровно одну вершину $x \in R$ от остальных вершин множества $V(\mathcal{C})$.*

3) *Множество T состоит из двух вершин части A и вершины $y \notin A$, такой, что ребром xy можно дополнить оба множества R и T.*

Доказательство. 1) Заметим, что $T \not\subset A$, так как иначе T не разделяло бы $V(\mathcal{C})$. Тогда $T \neq R$. Поскольку T относится к части A мы получаем, что $T \cap \mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$. Таким образом, R разделяет T, следовательно, эти множества зависимы.

2) То, что множество T отделяет ровно одну вершину $x \in V(\mathcal{C})$ от остальных вершин множества $V(\mathcal{C})$, непосредственно следует из леммы 16, если $\mathcal{C}$ — комплекс большого или малого разреза, леммы 17, если $\mathcal{C}$ — тройной комплекс и леммы 21, если $\mathcal{C}$ — комплекс ромашки. В случае, если $|\mathcal{C}| = 1$, данное утверждение очевидно. Поскольку T и R зависимы, $x \in R$.

3) Дополним множество R до разреза M всеми возможными ребрами, лежащими в $\overline{A}$ (напомним, что $\overline{A}$ — часть $\mathrm{Part}(R)$, не пересекающаяся с $\mathrm{Int}(A)$). Пусть M' — максимальный разрез, содержащий M. Поскольку $T \subset \mathrm{Nb}(A) = A \cup V(M)$, множество T не может порождать ромашку вместе с обеими границами разреза M'. Пусть $T \not\subset V(M')$, тогда из пункта 2 леммы 16 для разреза M' и множества T следует утверждение 3 настоящей леммы. Если же $T \subset V(M')$, мы получаем, что $M' \neq M$. Это возможно только если $\mathcal{C}$ — тройной комплекс или комплекс ромашки, причем $M \in \mathfrak{M}_1(G)$, а $M' \in \mathfrak{M}_2(G)$. В этом случае требуемое утверждение очевидно. □

Следствие 13. *Пусть комплексы $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ таковы, что $\mathcal{C}_2 = \{T\}$ и множество T разделяет $V(\mathcal{C}_1)$. Пусть также $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$ — часть, к которой относится множество T, $R = \mathrm{Bound}(A)$ и $\overline{A}$ — часть $\mathrm{Part}(R)$, не пересекающаяся с $\mathrm{Int}(A)$. Тогда $|\mathrm{Part}(R)| = |\mathrm{Part}(T)| = 2$, причем части $\mathrm{Part}(T)$ можно обозначить через B и $\overline{B}$ так, что выполняются следующие утверждения.*

1) $|\overline{A} \cap \overline{B}| = 2$.

2) $\mathrm{Nb}(\overline{B}) = \overline{B} \subset \mathrm{Nb}(A)$.

3) *Все множества комплекса $\mathcal{C}_1$ относятся к части $B \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_2)$.*

Доказательство. По лемме 29 множества R и T зависимы, T отделяет вершину $x \in R$ от остальных вершин множества $V(\mathcal{C}_1)$ и оба множества T и R можно дополнить ребром xy (где $y \in T$). Кроме того, $T \setminus A = \{y\}$. Поскольку T не входит в большие комплексы, $T \cap R = \varnothing$ и $|\mathrm{Part}(R)| = |\mathrm{Part}(T)| = 2$. Обозначим через B часть $\mathrm{Part}(T)$, не содержащую x, а через $\overline{B}$ — содержащую x. Проверим, что выполнены требуемые утверждения.

1) Поскольку $T \cap R = \varnothing$ имеем $T \cap \overline{A} = \{y\}$ и $R \cap \overline{B} = \{x\}$. По следствию 2 это означает, что $\overline{A} \cap \overline{B} = \{x, y\}$.

2) По лемме 26 все ребра, которыми можно дополнить T, лежат в части $\overline{B}$, следовательно, $\mathrm{Nb}(\overline{B}) = \overline{B}$. Кроме того, $\overline{B} \setminus A = \overline{B} \cap \mathrm{Int}(\overline{A}) = \{y\} \subset \mathrm{Nb}(A)$, следовательно, $\overline{B} \subset \mathrm{Nb}(A)$.

3) Поскольку $\mathrm{Nb}(\overline{B}) = \overline{B}$, к части $\overline{B}$ могут относиться только множества, содержащиеся в $\overline{B}$. Однако $V(\mathcal{C}_1) \cap \overline{B} \subset \{x, y\}$, следовательно, множества комплекса $\mathcal{C}_1$ не могут относиться к части $\overline{B}$. □

Лемма 30. *Для любого максимального нетривиального разреза M выполняется одно из следующих двух утверждений.*

1° *Все 3-разделяющие множества, содержащиеся в M, (как внутренние, так и границы) принадлежат некоторому комплексу $\mathcal{C}$.*

2° *Множество вершин любого комплекса $\mathcal{C}$ содержится в окрестности одной из частей* $\mathrm{Part}(M)$.

Доказательство. По лемме 16 если множество $T \in \mathfrak{R}_3(G)$ не содержится ни в одной из окрестностей частей $\mathrm{Part}(M)$, то оно вместе с границами M порождает ромашку, которую можно дополнить до максимальной ромашки F. Тогда все внутренние множества и границы разреза M принадлежат комплексу ромашки F, и выполняется утверждение 1°.

Пусть таких множеств нет. Тогда любое множество $T \in \mathfrak{R}_3(G)$ содержится в окрестности одной из частей $\mathrm{Part}(M)$. Докажем, что тогда выполняется утверждение 2°. В случае $|\mathcal{C}| = 1$ это утверждение очевидно. Положим $|\mathcal{C}| > 1$ и рассмотрим несколько случаев.

a. Пусть $\mathcal{C}$ — комплекс большого или малого разреза. Заметим, что множество вершин любого другого разреза M' содержится в окрестности одной из частей $\mathrm{Part}(M)$. Это очевидно, поскольку любые две вершины из $V(M')$ либо смежны, либо принадлежат общему 3-разделяющему множеству, содержащемуся в M' — в обоих случаях они не могут лежать во внутренностях разных частей $\mathrm{Part}(M)$.

Отсюда немедленно следует утверждение 2° в случае, если $\mathcal{C}$ — комплекс большого или малого разреза.

b. Пусть $\mathcal{C}$ — тройной комплекс с осью S. Так как разрез M нетривиален, S независимо с обеими границами M. Пусть $S \subset G_1^M$. Тогда множество вершин любого разреза с границей S содержится в $\mathrm{Nb}(G_1^M)$, следовательно, $V(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Nb}(G_1^M)$.

c. Осталось рассмотреть случай, когда $\mathcal{C}$ — комплекс ромашки F. В этом случае $V(F)$ содержится в окрестности одной из частей $\mathrm{Part}(M)$ (обозначим ее G_1^M), поскольку любые две вершины этого множества либо смежны, либо принадлежат общему 3-разделяющему множеству. Тогда любое множество ромашки F независимо с T_2^M, следовательно, G_2^M содержится в одной из частей $\mathrm{Part}(F)$ — пусть это $G_{i,i+1}$. Таким образом, единственной вершиной $V(\mathcal{C})$, не содержащейся в $\mathrm{Nb}(G_1^M)$ (и, следовательно, содержащейся в $\mathrm{Int}(G_2^M)$) может быть $u_{i,i+1}$, причем при условии $u_{i,i+1} \neq p$. В этом случае $u_{i,i+1}$ — единственная смежная с p вершина множества $G_{i,i+1}$ и, следовательно, множества $G_2^M \subset G_{i,i+1}$. Поскольку $u_{i,i+1} \in \mathrm{Int}(G_2^M)$ мы получаем, что $p \in T_2^M$. Тогда p не может быть концом ребра $px \in M$, поскольку в противном случае p смежна с вершинами $u_{i,i+1}$ и x, и только с ними, что невозможно. По лемме 5 это означает, что разрез M можно дополнить ребром $pu_{i,i+1}$, противоречие с максимальностью M. Следовательно, $V(\mathcal{C}) \subset \mathrm{Nb}(G_1^M)$. $\square$

Лемма 31. *Пусть $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ — два комплекса. Тогда все множества из $\mathcal{C}_2 \setminus \mathcal{C}_1$ относятся к одной и той же части $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$. При этом $V(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{Nb}(A)$.*

Доказательство. В случае, если $|\mathcal{C}_2| = 1$, утверждение леммы очевидно, а в случае $|\mathcal{C}_1| = 1$ оно непосредственно вытекает из следствия 13. Таким образом, нам достаточно рассмотреть случай, когда $|\mathcal{C}_1| > 1$ и $|\mathcal{C}_2| > 1$. Тогда мы получаем, что ни одно из множеств $V(\mathcal{C}_1)$ и $V(\mathcal{C}_2)$ не содержится в другом (множество вершин большого комплекса по построению не может содержаться в множестве вершин другого комплекса, а для малого комплекса это возможно только если он состоит из одного множества, являющегося границей большого комплекса). Рассмотрим вершину $u \in V(\mathcal{C}_2) \setminus V(\mathcal{C}_1)$ и часть $A \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$, содержащую u. Поскольку $u \notin V(\mathcal{C}_1)$, мы получаем, что $u \in \mathrm{Int}(A)$.

Заметим, что поскольку $|\mathcal{C}_1| > 1$, окрестность любой части $B \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$ содержится в $V(\mathcal{C}_1) \cup B$. Это означает, что никакое 3-разделяющее множество не может пересекать внутренности двух частей $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$, следовательно, все множества комплекса $\mathcal{C}_2$, пересекающиеся с $\mathrm{Int}(A)$, относятся к части A.

Докажем, что $V(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{Nb}(A)$. Для этого мы рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $\mathcal{C}_2$ — комплекс малого разреза. Если оба разделяющих множества этого комплекса содержат u, то они оба относятся к части A и, следовательно, содержатся в $\mathrm{Nb}(A)$. Если же u содержится только в одном множестве $T \in \mathcal{C}_2$, то $V(\mathcal{C}_2)$ состоит из вершин множества T и вершины u_1 смежной с u. Поскольку $u \in \mathrm{Int}(A)$ мы получаем, что $u_1 \in A$.

2. Пусть $\mathcal{C}_2$ — большой комплекс.

2.1. Пусть $\mathcal{C}_1$ — комплекс большого или малого разреза. Тогда требуемое утверждение следует из леммы 30.

2.2. Пусть $\mathcal{C}_1$ — тройной комплекс с осью S. В этом случае, S независимо со всеми множествами из $\mathcal{C}_2$, следовательно, $V(\mathcal{C}_2)$ содержится в одной из частей $\mathrm{Part}(S)$, а любая часть $\mathrm{Part}(S)$ является окрестностью одной из частей $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$.

2.3. Пусть $\mathcal{C}_1$ — комплекс ромашки F. Тогда $A = G'_{i,i+1}$ для некоторого i. Рассмотрим множество $M'_{i,i+1}$. Если $M'_{i,i+1}$ является максимальным разрезом, требуемое утверждение немедленно следует из леммы 30. Также требуемое утверждение очевидно, если $M'_{i,i+1}$ не содержит ни одного ребра (в этом случае из лемм 18 и 19 следует, что $M'_{i,i+1}$ является одиночным разделяющим множеством, совпадающим с границей части A). То есть нам достаточно рассмотреть случай, когда $M'_{i,i+1}$ содержит хотя бы одно ребро, но не является максимальным разрезом. Из определения 20 видно, что это возможно только если ромашка F неособая, ровно одна из частей $G_{i-1,i}$ и $G_{i+1,i+2}$ пуста (не умаляя общности будем считать, что это $G_{i+1,i+2}$) и центр p смежен ровно с одной вершиной части $G_{i,i+1}$ (обозначим ее u'). Рассмотрим этот случай более подробно.

Как следует из леммы 15, разрез $M'_{i,i+1}$ можно дополнить только ребром pu'. Обозначим получившийся максимальный разрез через M. По лемме 30 множество $V(\mathcal{C}_2)$ содержится в окрестности одной из частей $\mathrm{Part}(M)$. Заметим, что окрестность одной из двух частей $\mathrm{Part}(M)$ есть $G_{i,i+1} = \mathrm{Nb}(A)$ — если $V(\mathcal{C}_2)$ содержится в ней, то требуемое условие выполнено. Другая часть $\mathrm{Part}(M)$ — это $G_{i+2,i}$, а ее окрестность — $G_{i+1,i} \cup \{u'\}$. То есть мы можем считать, что $V(\mathcal{C}_2) \subset G_{i+1,i} \cup \{u'\}$ и $V(\mathcal{C}_2) \not\subset V(M)$. Заметим, что тогда $V(\mathcal{C}_2) \cap \mathrm{Int}(A) = \{u'\}$ и $u' = u$. Рассмотрим множество $T \in \mathcal{C}_2$, содержащее u. Поскольку $\mathcal{C}_2$ — большой комплекс, найдется множество $R \in \mathcal{C}_2$, зависимое с T. Из этого, в частности, следует, что $T \neq \{q_i, u, q_{i+1}\}$. Но тогда T зависимо с $Q_{i,i+1}$, то есть разделяет $V(F)$. По леммам 18 и 19 это означает, что $T = \{q_i, u, q_{i+2}\}$, причем это единственное множество комплекса $\mathcal{C}_2$, содержащее u. Далее, поскольку R и T зависимы, $q_{i+1} \in R$, то есть $\{u, q_i, q_{i+1}, q_{i+2}\} \subset V(\mathcal{C}_2)$. Кроме того, из леммы 11 следует, что $q_{i+2} \notin R$.

Заметим далее, что поскольку вершина u входит ровно в одно из множеств $\mathcal{C}_2$, этот комплекс не может быть комплексом большого разреза. Он также не может быть тройным комплексом, так как иначе либо T, либо одно из зависимых с T множеств было бы его осью — в любом из этих случаев ось тройного комплекса разделяла бы $V(F)$, что невозможно. Итак, $\mathcal{C}_2$ — комплекс ромашки F'. Очевидно, что тогда u — ее лепесток, причем количество лепестков равно четырем. Кроме того, $V(\mathcal{C}_2) = V(F')$, иначе $\mathcal{C}_2$ был бы комплексом большого разреза. Заметим, что центром F' может быть только q_i (остальные вершины не принадлежат либо T, либо R). Но тогда множество $R' = \{q_i, p, q_{i+1}\}$ содержит центр ромашки F' и зависимо с ее множеством T. Следовательно, по лемме 4, R' является множеством ромашки F' и, поскольку у F' только 4 лепестка, $R' = R$ и $F' = (q_i; u, q_{i+1}, q_{i+2}, p)$. Тогда $V(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{Nb}(A)$.

Итак, мы доказали, что во всех случаях $V(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{Nb}(A)$. Это означает, что любое множество комплекса $\mathcal{C}_2$ либо пересекается с $\mathrm{Int}(A)$, и следовательно относится к A, либо содержится в $V(\mathcal{C}_1)$. Заметим, что 3-разделяющее множество $R \subset V(\mathcal{C}_1)$ может либо принадлежать $\mathcal{C}_1$, либо быть границей одной из частей $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$. Таким образом, для завершения доказательства нам остается проверить, что никакое множество $R \in \mathcal{C}_2$ не может быть границей части $A_1 \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_1)$, отличной от

A. Это так, поскольку в противном случае множество R независимо с остальными множествами комплекса $\mathcal{C}_2$, но это возможно только если $\mathcal{C}_2$ — комплекс малого разреза, а в этом случае $V(\mathcal{C}_2) \subset \mathrm{Nb}(A_1)$, то есть $V(\mathcal{C}_2) \cap \mathrm{Int}(A) = \varnothing$. $\square$

Замечание 19. Заметим, что комплексы $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ могут пересекаться. Например, два комплекса невырожденных ромашек могут иметь общий граничный разрез.

Определение 32. Пусть $\mathfrak{C} = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ — множество всех комплексов графа G. Обозначим через $A_{i \supset j}$ часть $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_i)$, к которой относятся все разделяющие множества комплекса $\mathcal{C}_j$. Будем говорить, что комплекс $\mathcal{C}_j$ относится к части $A_{i \supset j}$.

Каждому комплексу $\mathcal{C}_i$ поставим в соответствие разбиение $\mathfrak{C}_i$ остальных комплексов на классы: комплексы $\mathcal{C}_j$ и $\mathcal{C}_\ell$ попадут в один класс разбиения тогда и только тогда, когда $A_{i \supset j} = A_{i \supset \ell}$.

Будем говорить, что комплекс $\mathcal{C}_i$ *разделяет* $\mathcal{C}_j$ и $\mathcal{C}_\ell$, если они содержатся в разных классах разбиения $\mathfrak{C}_i$. Назовем комплексы $\mathfrak{C}_i$ и $\mathfrak{C}_j$ соседними, если их не разделяет никакой отличный от них комплекс. Обозначим через $T(G)$ гиперграф, вершинами которого являются комплексы графа G, а гиперребрами — максимальные по включению множества попарно соседних комплексов. Гиперграф $T(G)$ назовем *гиперграфом разбиения* графа G.

Конструкция гиперграфа разбиения подробно описана в [2, раздел 2]. В данной работе мы будем использовать следующую теорему (см. [2, теорема 3]).

Теорема 4. *Каждому элементу множества V поставлено в соответствие разбиение остальных элементов V на классы. Пусть для любых $a, b, c \in V$ выполнено условие: если a разделяет b и c, то b не разделяет a и c. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Гипреграф $T(V)$ данного разбиения является гипердеревом (то есть, любой цикл в этом гиперграфе есть подмножество гиперребра).*

2) *Пусть для некоторой вершины $a \in V$ гиперграф $H(V) - a$ распадается на компоненты связности $W_1, \dots, W_\ell$. Тогда множество классов, на которые элемент a разбивает остальные элементы V, есть в точности $\{W_1, \dots, W_\ell\}$.*

Лемма 32. *Пусть B — непустая часть $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_j)$, отличная от $A_{j \supset i}$. Тогда $\mathrm{Nb}(B) \subset \mathrm{Nb}(A_{i \supset j})$. Более того, если $B \not\subset A_{i \supset j}$, то $|\mathcal{C}_j| = 1$ и единственное разделяющее множество комплекса $\mathcal{C}_j$ разделяет $V(\mathcal{C}_i)$.*

Доказательство. Пусть $R = \mathrm{Bound}(A_{i\supset j})$, $S = \mathrm{Bound}(A_{j\supset i})$, $T = \mathrm{Bound}(B)$.

Заметим, что если $B \subset A_{i\supset j}$, то $\mathrm{Nb}(B) \subset \mathrm{Nb}(A_{i\supset j})$. Действительно, если $y \in \mathrm{Nb}(B) \setminus B$, то множество T можно дополнить ребром xy (где $x \in T$). Если же при этом $y \notin A_{i\supset j}$, то $x \in R$, и из леммы 5 очевидно следует, что ребром xy можно дополнить также и множество R. Тогда $y \in \mathrm{Nb}(A_{i\supset j})$.

Таким образом, достаточно доказать утверждение $B \subset A_{i\supset j}$, что мы и сделаем во всех рассматриваемых ниже случаях, кроме случая 1.3.

Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $\mathcal{C}_j = \{T\}$. Этот случай распадается на следующие подслучаи.

1.1. $T = R$. Тогда T не разделяет $V(\mathcal{C}_i)$, следовательно, $V(\mathcal{C}_i) \subset A_{j\supset i}$. Кроме того, в этом случае $\mathcal{C}_i$ — большой комплекс, следовательно, $A_{i\supset j}$ есть объединение всех частей $\mathrm{Part}(T)$, кроме $A_{j\supset i}$. Таким образом, $B \subset A_{i\supset j}$.

1.2. $T \neq R$ и T не разделяет $V(\mathcal{C}_i)$. Тогда $R \subset V(\mathcal{C}_i) \subset A_{j\supset i}$. Это означает, что $R \cap \mathrm{Int}(B) = \varnothing$, то есть, по лемме 2, R не разделяет B. Тогда B содержится в некоторой части $H \in \mathrm{Part}(R)$. При этом $H \subset A_{i\supset j}$, так как $T \subset A_{i\supset j}$ и $T \neq R$. Таким образом, $B \subset A_{i\supset j}$.

1.3. T разделяет $V(\mathcal{C}_i)$. Тогда по следствию 13 $\mathrm{Part}(T) = \{A_{j\supset i}, B\}$ и $\mathrm{Nb}(B) = B \subset \mathrm{Nb}(A_{i\supset j})$. Отметим, что это единственный случай, когда $B \not\subset A_{i\supset j}$.

2. Пусть $|\mathcal{C}_j| > 1$.

Тогда $V(\mathcal{C}_j) \not\subset V(\mathcal{C}_i)$, следовательно, $V(\mathcal{C}_j) \cap \mathrm{Int}(A_{i\supset j}) \neq \varnothing$. Кроме того, в этом случае $V(\mathcal{C}_i) \subset \mathrm{Nb}(A_{j\supset i}) \subset A_{j\supset i} \cup V(\mathcal{C}_j)$. Заметим, что множество T не разделяет $A_{j\supset i} \cup V(\mathcal{C}_j)$, следовательно, $A_{j\supset i} \cup V(\mathcal{C}_j)$ содержится в некоторой части $H \in \mathrm{Part}(T)$. При этом $H \neq B$, так как $A_{j\supset i} \subset H$. Тогда $V(\mathcal{C}_i) \cap \mathrm{Int}(B) = \varnothing$, следовательно, B содержится в одной из частей $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_i)$. Докажем, что $B \subset A_{i\supset j}$. Для этого достаточно проверить, что $T \cap \mathrm{Int}(A_{i\supset j}) \neq \varnothing$.

Предположим противное. Тогда T либо содержит внутреннюю вершину другой части $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_i)$, либо содержится в $V(\mathcal{C}_i)$. Рассмотрим эти два подслучая более подробно. Пусть $\overline{A_{j\supset i}}$ — часть $\mathrm{Part}(S)$, содержащая $V(\mathcal{C}_j)$.

2.1. Пусть существует часть $F \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_i)$, такая, что $F \neq A_{i\supset j}$ и $T \cap \mathrm{Int}(F) \neq \varnothing$. Это возможно только если $\mathcal{C}_i = \{R\}$ и R разделяет $V(\mathcal{C}_j)$. Тогда по следствию 13 мы получим, что $|F \cap \overline{A_{j\supset i}}| = 2$. С другой стороны, $T \subset V(\mathcal{C}_j) \subset \overline{A_{j\supset i}}$, следовательно, $T \not\subset F$. Но тогда T зависимо с R, что невозможно, поскольку $R \subset H \in \mathrm{Part}(T)$. Таким образом, этот случай невозможен.

2.2. Пусть $T \subset V(\mathcal{C}_i)$. Тогда $T \subset \mathrm{Nb}(A_{j\supset i})$. Как мы знаем, $S = \mathrm{Bound}(A_{j\supset i})$, причем множества S и T независимы, следовательно, существует разрез M с границами S и T. При этом $V(\mathcal{C}_j) \subset \overline{A_{j\supset i}} \cap H = V(M)$. Так как $|\mathcal{C}_j| > 1$, отсюда по определению комплексов следует, что $V(\mathcal{C}_j) = V(M)$ и разрез M максимален.

Так как $V(\mathcal{C}_i) \subset H \in \mathrm{Part}(T)$, множество T не разделяет $V(\mathcal{C}_i)$. Тогда из того, что $T \subset V(\mathcal{C}_i)$, следует, что T — граница комплекса $\mathcal{C}_i$. Заметим также, что $\mathcal{C}_i \neq \{T\}$, поскольку множество T относится к отличной от $A_{j\subset i}$ части $B \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_j)$. Следовательно, $B \in \mathrm{Part}(\mathcal{C}_i)$ и $\mathrm{Nb}(B) = B \cup V(M)$. Это означает, что $V(M) \subset V(\mathcal{C}_i)$ — противоречие с тем, что $V(\mathcal{C}_j) \cap \mathrm{Int}(A_{i\supset j}) \neq \varnothing$. Таким образом, этот случай также невозможен. $\square$

Теорема 5. 1) *Гиперграф $T(G)$ является гипердеревом (то есть, любой цикл в этом графе есть подмножество некоторого гиперребра).*

2) *Пусть $\mathcal{C}' \in \mathfrak{C}$, а $H_1, \ldots, H_\ell$ — компоненты связности гиперграфа $T(G) - \mathcal{C}'$. Тогда $\mathfrak{C}_i = \{H_1, \ldots, H_\ell\}$.*

Доказательство. Оба утверждения данной теоремы непосредственно следуют из теоремы 4, поэтому нам достаточно проверить, что выполнено ее условие.

Предположим, что комплекс $\mathcal{C}_i$ разделяет $\mathcal{C}_j$ и $\mathcal{C}_\ell$, то есть $A_{i\supset j} \neq A_{i\supset \ell}$. Нам нужно доказать, что $\mathcal{C}_j$ не разделяет $\mathcal{C}_i$ и $\mathcal{C}_\ell$, то есть что $A_{j\supset i} = A_{j\supset \ell}$. По лемме 32 мы имеем $\mathrm{Nb}(A_{i\supset \ell}) \subset \mathrm{Nb}(A_{j\supset i})$, следовательно, $V(\mathcal{C}_\ell) \subset \mathrm{Nb}(A_{j\supset i})$. С другой стороны, $V(\mathcal{C}_\ell) \subset \mathrm{Nb}(A_{j\supset \ell})$.

Пусть $A_{j\supset i} \neq A_{j\supset \ell}$. Тогда $V(\mathcal{C}_\ell) \subset \mathrm{Nb}(A_{j\supset i}) \cap \mathrm{Nb}(A_{j\supset \ell})$. Кроме того, $\mathrm{Nb}(A_{j\supset i}) \neq A_{j\supset i}$, поскольку в противном случае $V(\mathcal{C}_\ell) \subset A_{j\supset i}$ и, следовательно, комплекс $\mathcal{C}_\ell$ относится к части $A_{j\supset i}$. Далее мы рассмотрим следующие два случая.

1. Пусть $|\mathcal{C}_j| > 1$. Тогда $V(\mathcal{C}_\ell) \subset \mathrm{Nb}(A_{j\supset i}) \cap \mathrm{Nb}(A_{j\supset \ell}) \subset V(\mathcal{C}_j)$. Это означает, что $\mathcal{C}_j$ — большой комплекс и $\mathcal{C}_\ell = \{T\}$, где $T = \mathrm{Bound}(A_{j\supset \ell})$. То есть $V(\mathcal{C}_\ell) \subset A_{j\supset \ell}$. Кроме того, по лемме 32 в этом случае $A_{j\supset \ell} \subset A_{i\supset j}$, следовательно, $V(\mathcal{C}_\ell) \subset A_{i\supset j}$. Но тогда комплекс $\mathcal{C}_\ell$ относится к части $A_{i\supset j}$, то есть $A_{i\supset j} = A_{i\supset \ell}$. Противоречие.

2. Пусть $\mathcal{C}_j = \{R\}$. Тогда, поскольку $\mathrm{Nb}(A_{j\supset i}) \neq A_{j\supset i}$, множество R не одиночно. Следовательно, $\mathrm{Part}(\mathcal{C}_j) = \{A_{j\supset i}, A_{j\supset \ell}\}$ и по лемме 26 получаем, что все ребра, которыми можно дополнить R лежат в части $A_{j\supset \ell}$. Это означает, что $\mathrm{Nb}(A_{j\supset \ell}) = A_{j\supset \ell}$, то есть $V(\mathcal{C}_\ell) \subset A_{j\supset \ell}$. Тогда R разделяет $V(\mathcal{C}_i)$, поскольку иначе по лемме 32 $A_{j\supset \ell} \subset A_{i\supset j}$ и $\mathcal{C}_\ell$ относится к части $A_{i\supset j}$, что противоречит сделанному выше предположению. Пусть $S = \mathrm{Bound}(A_{i\supset j})$. Так как R разделяет $V(\mathcal{C}_i)$, по следствию 13 мы имеем $\mathrm{Part}(S) = \{A_{i\supset j}, \overline{A_{i\supset j}}\}$ и $|A_{j\supset \ell} \cap \overline{A_{i\supset j}}| = 2$. Однако, $|V(\mathcal{C}_\ell)| \geq 3$, следовательно, $V(\mathcal{C}_\ell) \cap \mathrm{Int}(A_{i\supset j}) \neq \varnothing$ и комплекс $\mathcal{C}_\ell$ относится к части $A_{i\supset j}$. Противоречие. $\square$

Список литературы

[1] Д. В. Карпов. *Блоки в k-связных графах.* Записки научных семинаров ПОМИ, **293**, 2002, стр. 59-93.

[2] Д. В. Карпов. *Разделяющие множества в k-связном графе.* Записки научных семинаров ПОМИ, **340**, 2006, стр. 33-60.

[3] Д. В. Карпов, А. В. Пастор. *О структуре k-связного графа.* Записки научных семинаров ПОМИ, **266**, 2000, стр. 76-106.

[4] О. Оре. *Теория графов.* Москва, "Наука", 1968. (Перевод с английского. O. Ore, *Theory of graphs,* 1962.)

[5] Ф. Харари. *Теория графов.* Москва, "Мир", 1973. (Перевод с английского. F. Harary, *Graph theory,* 1969.)

[6] W. Hohberg. *The decomposition of graphs into k-connected components.* Discr. Math., **109**, 1992, p. 133-145.

[7] J. E. Hopcroft and R. E. Tarjan. *Dividing a graph into triconnected components.* SIAM J. Comput., **2**, 1973, p. 135-158.

[8] W. T. Tutte. *A theory of* 3*-connected graphs.* Indag. Math. 1961, vol. 23, p. 441-455.

[9] W. T. Tutte. *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.