ЗАДАНИЕ 3 (МФ, 3 курс, весна)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Найти решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \quad x \in [a, b], y \in [c, d]$$

$$u(a, y) = \varphi_1(y) \quad u(b, y) = \varphi_2(y)$$

$$u(x, c) = \varphi_3(y) \quad u(x, d) = \varphi_4(y)$$

методом установления решения нестационарного уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} - f(x, y)$$

Входные параметры: τ- итерационный параметр (шаг по псевдовремени);
Nx, Ny- число шагов сетки по x,y; ε- параметр, характеризующий сходимость итераций.
Контроль сходимости итераций проводится проверкой неравенства

$$\left\| \frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} \right\| \frac{1}{\left\| u^n \right\|} \le \varepsilon,$$

а сходимость численного решения к точному характеризует величина

$$\delta = \frac{\left\| u_{числ} - u_{точн} \right\|}{\left\| u_{числ} \right\|},$$

которая зависит от степени детальности сетки.
Вторые производные аппроксимируются обычными трехточечными разностными аналогами

$$\Lambda_1 u_{mj} = \frac{u_{m-1j} - 2u_{mj} + u_{m+1j}}{h_1^2}$$

$$\Lambda_2 u_{mj} = \frac{u_{mj-1} - 2u_{mj} + u_{mj+1}}{h_2^2}$$

1. Явная схема:

$$\frac{u_{mj}^{n+1} - u_{mj}^n}{\tau} = \Lambda_1 u_{mj}^n + \Lambda_2 u_{mj}^n - f_{mj}$$

2. Схема расщепления:

$$\frac{u_{mj}^{n+1/2} - u_{mj}^n}{\tau} = \Lambda_1 u_{mj}^{n+1/2} - f_{mj}$$

$$\frac{u_{mj}^{n+1} - u_{mj}^{n+1/2}}{\tau} = \Lambda_2 u_{mj}^{n+1}$$

3. Схема продольно-поперечной прогонки:

$$\frac{u_{mj}^{n+1/2} - u_{mj}^n}{\tau / 2} = \Lambda_1 u_{mj}^{n+1/2} + \Lambda_2 u_{mj}^n - f_{mj}$$

$$\frac{u_{mj}^{n+1} - u_{mj}^{n+1/2}}{\tau / 2} = \Lambda_1 u_{mj}^{n+1/2} + \Lambda_2 u_{mj}^{n+1} - f_{mj}$$

4. Схема стабилизирующей поправки:

$$\frac{u_{mj}^{n+1/2}-u_{mj}^{n}}{\tau}=\Lambda_1 u_{mj}^{n+1/2}+\Lambda_2 u_{mj}^{n}-f_{mj}$$

$$\frac{u_{mj}^{n+1}-u_{mj}^{n+1/2}}{\tau}=\Lambda_2\,(u_{mj}^{n+1}-u_{mj}^{n})$$

5. Схема приближенной факторизации:

$$(E-\tau\Lambda_1)\xi_{mj}^{n+1/2}=\tau\left[(\Lambda_1+\Lambda_2)u_{mj}^{n}-f_{mj}\right]$$

$$(E-\tau\Lambda_2)\xi_{mj}^{n+1}=\xi_{mj}^{n+1/2}$$

$$u_{mj}^{n+1}=u_{mj}^{n}+\xi_{mj}^{n+1}$$

6. Попеременно - треугольный метод:

$$(E-\tau\Lambda_1^{-}-\tau\Lambda_2^{-})\xi_{mj}^{n+1/2}=\tau\left[(\Lambda_1+\Lambda_2)u_{mj}^{n}-f_{mj}\right]$$

$$(E-\tau\Lambda_1^{+}-\tau\Lambda_2^{+})\xi_{mj}^{n+1}=\xi_{mj}^{n+1/2}$$

$$u_{mj}^{n+1}=u_{mj}^{n}+\xi_{mj}^{n+1}$$

где

$$\Lambda_1^{-}u_{mj}=\frac{-u_{mj}+u_{m-1j}}{h_1^2}\qquad \Lambda_1^{+}u_{mj}=\frac{u_{m+1j}-u_{mj}}{h_1^2}$$

$$\Lambda_2^{-}u_{mj}=\frac{-u_{mj}+u_{mj-1}}{h_2^2}\qquad \Lambda_2^{+}u_{mj}=\frac{u_{mj+1}-u_{mj}}{h_2^2}$$

7. Итерационный метод Якоби:

$$\frac{u_{m-1j}^{n}-2u_{mj}^{n+1}+u_{m+1j}^{n}}{h_1^2}+\frac{u_{mj-1}^{n}-2u_{mj}^{n+1}+u_{mj+1}^{n}}{h_2^2}=f_{mj}$$

8. Итерационный метод Зейделя:

$$\frac{u_{m-1j}^{n+1}-2u_{mj}^{n+1}+u_{m+1j}^{n}}{h_1^2}+\frac{u_{mj-1}^{n+1}-2u_{mj}^{n+1}+u_{mj+1}^{n}}{h_2^2}=f_{mj}$$

1. Точное решение

$$u(x,y)=\cos(x+y)\sin(xy)$$

$$a=\pi/2,\qquad b=3\pi/2$$

$$c=\pi/2,\qquad d=3\pi/2$$

Правую часть f, граничные условия для φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, найти из точного решения.

2. Точное решение

$$u(x,y) = \sin^2(x+y)\, xy$$

$$a = \pi/2, \qquad b = 3\pi/2$$

$$c = \pi/2, \qquad d = 3\pi/2$$

Правую часть f, граничные условия для φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, найти из точного решения

3. Точное решение

$$u(x,y) = e^{xy} \cos(2\pi(x+y))$$

$$a = 0, \qquad b = 1$$

$$c = 0, \qquad d = 1$$

Правую часть f, граничные условия для φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, найти из точного решения

4. Точное решение

$$u(x,y) = e^{xy} \cos(2\pi(x^2+y))$$

$$a = 0, \qquad b = 1$$

$$c = 0, \qquad d = 1$$

Правую часть f, граничные условия для φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, найти из точного решения

Необходимо сравнить приближенное решение с точным и исследовать порядок сходимости при размельчении шагов сетки