**ЗАДАНИЕ 2 (МФ, 3 курс, весна)**

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

1. Найти решение начально-краевой задачи :

$$U_t + U_x = 0, \quad x \in [0,1], \ t \in [0,1]$$
$$t = 0: \ U(x,0) = 0, \ x > 0$$
$$x = 0: \ U(0,t) = 1, \ t \ge 0, \quad x = 1: \ U(1,t) = 0, \ t \ge 0$$

с помощью схемы (при $\alpha = 0.5$ добавить искусственную вязкость) :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j+1}^* - u_{j-1}^*}{2h} = 0$$
$$u^* = \alpha u^{n+1} + (1-\alpha)u^n, \quad 0 \le \alpha \le 1$$

2. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + U_x = 0, \quad x \in [0,1], \ t \in [0,1]$$
$$t = 0: \ U(x,0) = 0, \ x > 0$$
$$x = 0: \ U(0,t) = 1, \ t \ge 0, \quad x = 1: \ U(1,t) = 0, \ t \ge 0$$

с помощью схемы:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{3u_j^* - 4u_{j-1}^* + u_{j-2}^*}{2h} = 0$$
$$u^* = \alpha u^{n+1} + (1-\alpha)u^n, \quad 0 \le \alpha \le 1$$

3. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + U_x = 0, \quad x \in [0,1], \ t \in [0,1]$$
$$t = 0: \ U(x,0) = 0, \ x > 0$$
$$x = 0: \ U(0,t) = 1, \ t \ge 0, \quad x = 1: \ U(1,t) = 0, \ t \ge 0$$

с помощью трехслойной схемы:

$$\frac{3u_j^{n+1} - 4u_j^n + u_j^{n-1}}{2\tau} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

4. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + U_x = 0, \quad x \in [0,1], \ t \in [0,1]$$
$$t = 0: \ U(x,0) = 0, \ x > 0$$
$$x = 0: \ U(0,t) = 1, \ t \ge 0, \quad x = 1: \ U(1,t) = 0, \ t \ge 0$$

с помощью схем:

$$\text{a)} \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$$
$$\text{b)} \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

показать, что решение схемы а) при $\frac{\tau}{h} = 1$ совпадает с точным решением задачи.

5. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + \varphi_x = 0, \ \varphi = \frac{U^2}{2}, \ x \in [0,1], \ t \in [0,1]$$
$$t = 0: \quad U(x,0) = 0.5, \ x > 0$$
$$x = 0: \quad U(0,t) = 1.5, \quad t \ge 0, \quad x = 1: \quad U(1,t) = 0.5, \quad t \ge 0$$

с помощью схемы Лакса:

$$\frac{u_j^{n+1} - 0.5\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right)}{\tau} + \frac{\varphi_{j+1}^{n+1} - \varphi_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

6. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + \varphi_x = 0,\ \varphi = \frac{U^2}{2},\ x \in [0,1],\ t \in [0,1]$$

$$t = 0:\ U(x,0) = -3x + 1,$$

$$x = 0:\ U(0,t) = 1,\ t \ge 0,\quad x = 1:\ U(1,t) = -2,\ t \ge 0$$

с помощью схемы предиктор-корректор (добавить искусственную вязкость):

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - 0.5\left(u_{j+1}^n + u_j^n\right)}{0.5\tau} + \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{h} = 0$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{\varphi_{j+1/2}^{n+1/2} - \varphi_{j-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0$$

7. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + \varphi_x = 0,\ \varphi = \frac{U^2}{2},\ x \in [0,1],\ t \in [0,1]$$

$$t = 0:\ U(x,0) = -3x + 1,$$

$$x = 0:\ U(0,t) = 1,\ t \ge 0,\ x = 1:\ U(1,t) = -2,\ t \ge 0$$

с помощью модифицированной схемы предиктор-корректор $0 \le \varepsilon \le 0.5$:

$$\frac{u_{j+1/2}^{n+1/2} - 0.5\left(u_{j+1}^n + u_j^n\right)}{(0.5+\varepsilon)\tau} + \frac{\tau}{h}\left(\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n\right) = 0$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{\varphi_{j+1/2}^{n+1/2} - \varphi_{j-1/2}^{n+1/2}}{h} = 0$$

8. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + \varphi_x = 0,\quad \varphi = \frac{U^2}{2},\quad x \in [0,1],\ t \in [0,1]$$

$$t = 0:\ U(x,0) = -2x + 1,$$

$$x = 0:\ U(0,t) = 1,\ t \ge 0,\quad x = 1:\ U(1,t) = -1,\ t \ge 0$$

с помощью схемы Мак-Кормака:

$$\frac{\tilde{u}_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{\varphi_{j+1}^n - \varphi_j^n}{h} = 0$$

$$\frac{\bar{u}_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{\tilde{\varphi}_j^{n+1} - \tilde{\varphi}_{j-1}^{n+1}}{h} = 0$$

$$u_j^{n+1} = 0.5(\tilde{u}_j^{n+1} + \bar{u}_j^{n+1})$$

9. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + \varphi_x = 0,\ \varphi = \frac{U^2}{2},\ x \in [0,1],\ t \in [0,1]$$

$$t = 0:\ U(x,0) = x,$$

$$x = 0:\ U(0,t) = 0,\ t \ge 0,$$

$$x = 1:\ U(1,t) = \frac{1}{1+t},\ t \ge 0,$$

с помощью схем (объяснить совпадение численного и точного решения для схемы a)):

$$\text{a)}\quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + u_j^n \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = 0$$

$$\text{b)}\quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + u_j^n \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

10. Найти решение начально-краевой задачи:

$$
\begin{aligned}
&U_t + \left(\frac{U^2}{2}\right)_x = 0, \quad x \in [0,1],\ t \in [0,1] \\
&t = 0: \ \ U(x,0) = x, \\
&x = 0: \ \ U(0,t) = 0,\ t \ge 0, \\
&x = 1: \ \ U(1,t) = \frac{1}{1+t},\ t \ge 0,
\end{aligned}
$$

с помощью схемы:

$$
\frac{1}{6}\left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n}}{\tau} + 4\frac{u_{j}^{n+1} - u_{j}^{n}}{\tau} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^{n}}{\tau}\right) + u_j^n \frac{u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j-1}^{n+1/2}}{2h} = 0
$$

$$
u^{n+1/2} = 0.5(u^n + u^{n+1})
$$

Сравнить численное решение с точным $u(x,t) = \dfrac{x}{1+t}$.

11. Найти решение начально-краевой задачи:

$$
\begin{aligned}
&U_t + f_x = 0, \quad x \in [0,\ 1],\ t \in [0,\ 1],\ f = \frac{U^2}{2} \\
&t = 0: \ \ U(x,0) = -2x + 1, \\
&x = 0: \ \ U(0,t) = 1,\ t \ge 0, \\
&x = 1: \ \ U(1,t) = -1,\ t \ge 0
\end{aligned}
$$

с помощью схемы:

$$
u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h}\left(f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n\right)
$$

$$
f_{j+1/2} = 0.5(f_j + f_{j+1}) - 0.5\left[a^2\frac{\tau}{h}\right]_{j+1/2}\Psi_{j+1/2} -
$$

$$
0.5|a|_{j+1/2}(\Delta u_{j+1/2} - \Psi_{j+1/2}), \quad \varphi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\varphi_{i+1} + \varphi_i}{2}
$$

$$
a = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \Delta u_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j,
$$

$$
\Psi_{j+1/2} = \mathrm{minmod}(\Delta u_{j-1/2}, \Delta u_{j+1/2}) + \mathrm{minmod}(\Delta u_{j+1/2}, \Delta u_{j+3/2}) - \Delta u_{j+1/2}
$$

$$
\mathrm{minmod}(x,y) = \mathrm{sign}(x)\max\left[0, \min\left(|x|, y\cdot \mathrm{sign}(x)\right)\right]
$$

12. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + f_x = 0, \quad x \in [0,\ 1],\ \ t \in [0,\ 1],\ \ f = \frac{U^2}{2}$$

$$t = 0: \quad U(x,0) = -2x + 1,$$

$$x = 0: \quad U(0,t) = 1,\ \ t \ge 0,$$

$$x = 1: \quad U(1,t) = -1,\ \ t \ge 0$$

с помощью схемы:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h}\left(f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n\right)$$

$$f_{j+1/2} = 0.5(f_j + f_{j+1}) - 0.5\left[a\frac{\tau}{h}\Phi\right]_{j+1/2}\Delta f_{j+1/2} -$$

$$0.5|a|_{j+1/2}(1-\Phi)\Delta u_{j+1/2}$$

$$a = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad \Delta u_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j,$$

$$\Phi(r) = \begin{cases} \min(2,\ r), & r > 1 \\ \min(2r,\ 1), & 0 \le r \le 1 \\ 0, & r < 0 \end{cases} \qquad r_j = \frac{\Delta u_{j-1/2}}{\Delta u_{j+1/2}}$$

13. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + f_x = 0, \quad x \in [0,\ 1],\ \ t \in [0,\ 1],\ \ f = \frac{U^2}{2}$$

$$t = 0: \quad U(x,0) = -2x + 1,$$

$$x = 0: \quad U(0,t) = 1,\ \ t \ge 0,$$

$$x = 1: \quad U(1,t) = -1,\ \ t \ge 0$$

с помощью схемы:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h}\left(f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n\right)$$

$f_{j+1/2} = 0.5$ [redacted] $_j + f_{j+1} - Q(a_{j+1/2})\Delta u_{j+1/2}$

$$a_{j+1/2} = \begin{cases} \dfrac{\Delta f_{j+1/2}}{\Delta u_{j+1/2}} & \Delta u_{j+1/2} \ne 0 \\ a(u_j) & \Delta u_{j+1/2} = 0 \end{cases}, \quad a = \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\Delta u_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j,$$

Сравнить между собой и с точным решением значения u(x,t), получаемые с помощью функции Q задаваемой в виде:

1) $Q(z) = |z|$

2) $Q(z) = \begin{cases} 0.5\left(\dfrac{z^2}{\varepsilon} + \varepsilon\right), & |z| < \varepsilon \\ |z|, & |z| \ge \varepsilon \end{cases}, \quad 0.06 \le \varepsilon \le 0.125$

14. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + f_x = 0, \quad x \in [0,\ 1],\ \ t \in [0,\ 1],\ \ f = \frac{U^2}{2}$$

$$t = 0: \quad U(x,0) = -2x + 1,$$

$$x = 0: \quad U(0,t) = 1,\ \ t \geq 0,$$

$$x = 1: \quad U(1,t) = -1,\ \ t \geq 0$$

с помощью схемы:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h}\left(f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n\right)$$

$$f_{j+1/2} = f^+\left(u_{j+1/2}^-\right) + f^-\left(u_{j+1/2}^+\right)$$

$$f^{\pm}(u) = 0.5(a \pm |a|)u, \quad a = \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$u_{j+1/2}^- = u_j + \Phi_1 \Delta\tilde{u}_{j+1/2} + \Phi_2 \Delta\tilde{\tilde{u}}_{j-1/2}$$

$$u_{j+1/2}^+ = u_{j+1} - \Phi_1 \Delta\tilde{\tilde{u}}_{j+1/2} - \Phi_2 \Delta\tilde{u}_{j+3/2}$$

$$\Delta\tilde{\tilde{u}}_{j-1/2} = G(\Delta u_{j-1/2},\ \beta\Delta u_{j+1/2})$$

$$\Delta\tilde{u}_{j+1/2} = G(\Delta u_{j+1/2},\ \beta\Delta u_{j-1/2})$$

$$\Delta\tilde{\tilde{u}}_{j+1/2} = G(\Delta u_{j+1/2},\ \beta\Delta u_{j+3/2})$$

$$\Delta\tilde{u}_{j+3/2} = G(\Delta u_{j+3/2},\ \beta\Delta u_{j+1/2})$$

$$G(x,y) = \mathrm{sign}(x)\max\left[0,\ \min(|x|,\ y\cdot\mathrm{sign}(x))\right]$$

$$\Delta u_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j$$

$$0 \leq \beta \leq \frac{3-\Phi}{1-\Phi}, \quad \Phi_1 = \frac{1+\Phi}{4}, \quad \Phi_2 = \frac{1-\Phi}{4}, \quad \Phi = \frac{1}{3}$$

15. Найти решение начально-краевой задачи:

$$U_t + f_x = 0, \quad x \in [0,\ 1], \ t \in [0,\ 1], \ f = \frac{U^2}{2}$$

$$t = 0: \quad U(x,0) = -2x + 1,$$

$$x = 0: \quad U(0,t) = 1, \ t \geq 0,$$

$$x = 1: \quad U(1,t) = -1, \ t \geq 0$$

с помощью схемы:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h}(f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n)$$

$$f_{j+1/2} = 0.5\left\{(f_{j+1} + f_j) - \left|a_{j+1/2}\right|\Delta u_{j+1/2} - 0.5\left(\frac{2}{3}(A - B) + \frac{4}{3}(N - M)\right)\right\}$$

$$a = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \Delta u_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j$$

$$A = \operatorname{minmod}(a^-_{j+3/2}\Delta u_{j+3/2},\ \beta a^-_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2})$$

$$B = \operatorname{minmod}(a^-_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2},\ \beta a^-_{j+3/2}\Delta u_{j+3/2})$$

$$N = \operatorname{minmod}(a^+_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2},\ \beta a^+_{j-1/2}\Delta u_{j-1/2})$$

$$M = \operatorname{minmod}(a^+_{j-1/2}\Delta u_{j-1/2},\ \beta a^+_{j+1/2}\Delta u_{j+1/2})$$

$$\operatorname{minmod}(x, y) = \operatorname{sign}(x)\max\left[0,\ \min(|x|,\ y \cdot \operatorname{sign}(x))\right]$$

$$a^{\pm} = 0.5(a \pm |a|), \quad 0 \leq \beta \leq 4$$

Обозначения A, B, N, M заменить на A,N,M,B. Кроме того $2 \leq \beta \leq 4$. Это странное замечание связано с невозможностью редактирования в "Equation 3" формул, неверно сделанных во второй версии "Equation 2".