1 Умножение матриц

1.1 Постановка задачи

Реализация алгоритма умножения двух матриц с использованием POSIX threads: необходимо вычислить произведение двух квадратных матриц A и B размера n: в результате чего получается матрица $C = A \times B$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$, где $c_{i,j}$ – элементы матрицы C.

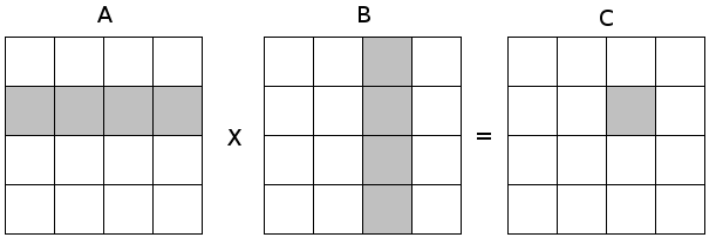
1.2 Подход к распараллеливанию

1.2.1 Простая реазиация

Статически распределяем задачу между потоками: при запуске каждый поток в качестве аргумента принимает интервал строк $[start_i; end_i)$ ($i = 0 \dots T$-1, $end_i = start_{i+1}$ для $i = 0 \dots T$-2, где T - количество потоков) результирующей матрицы, которые ему надо посчитать. Т. к. все потоки вычисляют различные элементы матрицы C, то синхронизация не требуется.

1.2.2 Блочное умножение

Матрицы A, B, C разбиваются на одинаковые квадратные (по количеству элементов) блоки размера, кратного размеру матриц. Пусть размер блока равен $bsize$, обозначим $bcount = \frac{n}{bsize}$, тогда каждя матрица разбита на $bcount \cdot bcount$ блоков. Блок (i, j) матрицы C вычисляется: $BC_{i,j} = \sum_{k=1}^{bcount} BA_{i,k} \cdot BB_{k,j}$, где умножение блоков $BA_{i,k} \times BB_{k,j} = BT$, элементы BT: $bt_{i,j} = \sum_{k=1}^{bsize} ba_{i,k} \cdot bb_{k,j}$.



Как и в предыдущем подходе, распределяее между потоками осуществлялось статически: занумеруем все блоки, при запуске каждый поток в качестве аргумента принимает интервал блоков $[start_i\ end_i)$ ($i = 0 \dots bcount \cdot bcount$-1, $end_i = start_{i+1}$ для $i = 0 \dots T$-2, где T - количество потоков) результирующей матрицы, которые ему надо посчитать. Как и в простой реализации, все потоки вычисляют различные элементы матрицы C и синхронизация не требуется.

1.2.3 Наибольший параллелизм

Из определения умножения следует, что для вычисления матрицы C необходимо произвести n^3 умножений. Распределим умножения между всеми потоками: занумеруем все умножения числами от 0 до n^3-1 и аналогично предыдущим реализациям будем в каждый поток передавать интервал $[start_i; end_i)$ – номера умножений, которые надо посчитать.

При данном подходе разные потоки могут считать одни элементы матрицы C, поэтому для каждого из них создаём отдельную матрицу C_i, т. о. синхронизация по-прежнему не требуется. Итоговая матрица $C = \sum_{i=0}^{T-1} C_i$.

1.3 Реузльтаты тестирования

Измерение времени осуществлялось с помощью системной команды time. Размер матрицы $n = 2000$.

Реализация	**Кол-во потоков**	**Время**		
		обычное	блочное (100)	необычное
Однопоточная		19.209	20.520	-
Многопоточная	1	19.086	20.458	19.117
Многопоточная	2	10.656	11.275	10.771
Многопоточная	3	7.887	8.241	8.031
Многопоточная	4	6.913	6.703	7.306
Многопоточная	5	7.858	7.641	8.041
Многопоточная	6	7.174	6.780	7.366
Многопоточная	7	7.171	6.755	7.360
Многопоточная	8	7.164	6.765	7.353
Многопоточная	9	7.277	6.871	7.503
Многопоточная	10	7.169	6.784	7.419

2 LU-разложение

2.1 Постановка задачи

Известно, что квадратную матрицу A размера n можно представить как произведение двух матриц $L \cdot U$ размера $n \times n$, где L – нижняя треугольная матрица, U – верхняя треугольная матрица. Элементы $l_{i,j}$ и $u_{i,j}$ соответственно матриц L и U могут быть вычислены по формулам:

$u_{0,j} = a_{0,j}$, $0 \le j < n$

$u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=0}^{i-1} l_{i,k} \cdot u_{k,j}$, $i \le j < n$

$l_{i,i} = 1$

$l_{i,0} = \frac{a_{i,0}}{u_{0,0}}$, $1 \le j < n$

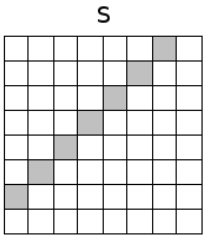
$l_{i,j} = \frac{1}{u_{j,j}}(a_{i,j} - \sum_{k=0}^{i-1} l_{i,k} \cdot u_{k,j})$, $i + 1 \le j < n$

2.2 Подход к распараллеливанию

Рассмотрим матрицу $S = L + U$ - $E = \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & u_{0,2} & \cdots & u_{0,n-1} \\ l_{1,0} & u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & \vdots \\ l_{2,0} & l_{2,1} & u_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & u_{n-2,n-1} \\ l_{n-1,0} & \cdots & \cdots & l_{n-1,n-2} & u_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = (s_{i,j})$,

где E – единичная матрица.

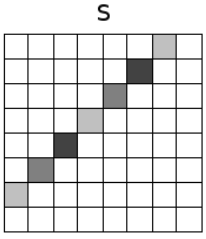
Для вычисления $s_{i,j}$ требуются элементы $s_{u,j}$, $0 \le u < \min(i,j)$ и $s_{i,v}$, $0 \le v < \min(i,j)$, т. е. $s_{i,j}$ зависит только от тех элементов, которые находятся выше или левее в матрице S. Элементы $s_{i,k-i}$, расположенные на диагонали, не зависят друг от друга:



Идея алгоритма распараллеливания заключается в том, чтобы последовательно вычислять диагонали. При вычислении очередной диагонали каждый поток:

1. На основании thread_id определяет, какие элементы он будет вычилсять.
2. Вычисляет их.
3. Ожидает, когда другие потоки закончат вычисление своих элементов данной диагонали.

Элементы диагонали, которые будет вычислять, поток, определются чередованием: при $tcount$ потоков на k-й диагонали поток tid будет вычислять элементы $s_{i-tid-i \cdot tcount, k+tid+i \cdot tcount}$, $i \le 0$:



Синхронизация осуществляется с помощью pthread_barrier.

2.3 Результаты тестирования

Измерение времени осуществлялось с помощью встроенной в bash утилиты time. Размер матрицы $n = 2000$.

Однопоточная		54.457
Многопоточная	1	63.709
Многопоточная	2	36.795
Многопоточная	3	28.863
Многопоточная	4	25.877
Многопоточная	5	36.095
Многопоточная	6	34.460
Многопоточная	7	35.333
Многопоточная	8	35.748
Многопоточная	9	41.486
Многопоточная	10	42.567

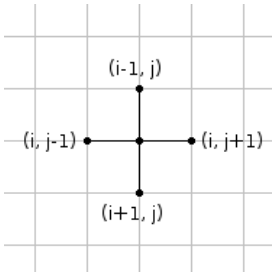
3 Решение уравнения Пуассона методом “крест”

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим двумерную сетку, значение в узле с координатами $(i,\ j)$ обозначим через $a_{i,j}$.

На каждой итерации пересчитываем значение в узлах по формуле:

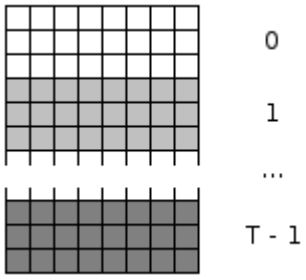
$$a_{i,j}^{k+1} = \frac{a_{i-1,j}^{k} + a_{i,j+1}^{k} + a_{i+1,j}^{k} + a_{i,j-1}^{k} + a_{i,j}^{k}}{5}$$



3.2 Подход к распараллеливанию

3.2.1 Деление по строкам

Статически распределяем задачу между потоками: при запуске каждый поток в качестве аргумента принимает интерал строк $[start_i; end_i)$ ($i = 0 \dots T$-1, $end_i = start_{i+1}$ для $i = 0 \dots T$-2, где T - количество потоков) матрицы, которые ему надо посчитать. Т. к. каждому потоку для вычисления (k+1)-й итерации необходимо иметь значения, полученные соседними потоками после k-й итерации, то синхронизация осуществляется после каждой итерации: с помощью pthread_barrier все потоки дожидаются друг друга.



3.2.2 Очередь элементов

Рассмотрим i-ю строку: для вычисления $(k + 1)$-й итерации необходимо иметь значения для (i-1)-й и (i+1)-й строк, полученных на k-й итерации, при этом от остальных строк i-ая никак не зависит.

Воспользуемся этим фактом, будем хранить список строк, для которых может быть посчитана очередная итерация. Поток, посчитав очередную строку, определяет новые строки, которые теперь могут быть посчитаны, и добавляет их в список.

Список строк просто реализуется с помощью очереди: новые строки добавляем в конец, строки для вычисления берём из начала очереди. Синхронизация требуется только при доступе к очереди и может быть реализована с помощью pthread_mutex.

3.3 Результаты тестирования

Измерение времени осуществлялось с помощью системной команды time. Размер матрицы $n = 2000$, количество итераций – 1000.

Время работы однопоточной реализации: 160 с.

Реализация	**Кол-во потоков**	**Время (в секундах)**	
		по строкам	очередь
Многопоточная	1	160	161
Многопоточная	2	87	88
Многопоточная	3	62	64
Многопоточная	4	51	52
Многопоточная	5	65	52
Многопоточная	6	58	52
Многопоточная	7	56	52
Многопоточная	8	52	52
Многопоточная	9	58	52
Многопоточная	10	56	52