

Частично гомоморфные системы шифрования

Криптосистема RSA

Криптосистема RSA является, наверное, самой популярной криптографической схемой. Пусть n – составной модуль и e – открытая экспонента. То есть пара (n, e) является открытым ключом криптосистемы. Далее, пусть $m \in \mathbb{Z}_n$ – открытый текст. Функция шифрования $f((n, e), m) = m^e \bmod n$ гомоморфна относительно умножения открытых текстов. В самом деле, для любых открытых текстов m_1, m_2 и любого открытого ключа k криптограмма произведения равна произведению криптограмм сомножителей: $f(k, m_1 \cdot m_2) = f(k, m_1) \cdot f(k, m_2)$

Криптосистема Эль-Гамала

Пусть G – циклическая группа порядка p и g – ее порождающий элемент. В качестве секретного ключа криптосистемы выбирается случайный элемент x группы \mathbb{Z}_{p-1} . Соответствующий открытый ключ вычисляется по формуле $y = g^x$. Криптограмма открытого текста $m \in G$ вычисляется с помощью функции шифрования $f(y, m) = (y^r \cdot m, g^r)$, где r – случайный элемент группы \mathbb{Z}_{p-1} , то есть число r выбирается всякий раз заново, независимо и равномерно.

Дешифрование криптограммы c_1, c_2 выполняется следующим образом. Сначала вычисляется $c_2^x = g^{r \cdot x}$, откуда $m = \frac{c_1}{c_2^x}$. Функция шифрования криптосистемы Эль-Гамала гомоморфна относительно операции умножения открытых текстов: криптограмма произведения может быть вычислена как произведение криптограмм сомножителей. Если $f(y, m_1) = (y^{r_1} \cdot m_1, g^{r_1})$ и $f(y, m_2) = (y^{r_2} \cdot m_2, g^{r_2})$, то $f(y, m_1 \cdot m_2)$ можно получить в виде $(y^{r_1} \cdot y^{r_2} \cdot m_1 \cdot m_2, g^{r_1} \cdot g^{r_2})$

Several categorical theorems

Theorem

$$\begin{aligned} \text{id} : \oplus \rightarrow_{\mathbb{F}} \oplus \\ f : \oplus \rightarrow_{\mathbb{F}} \otimes \quad \text{and} \quad g : \otimes \rightarrow_{\mathbb{F}} \odot \quad \Rightarrow \quad g \circ f : \oplus \rightarrow_{\mathbb{F}} \odot \end{aligned}$$

Proof

$$\begin{aligned} \text{id} : \oplus \rightarrow_{\mathbb{F}} \oplus &\equiv \text{id} \circ \oplus = \oplus \circ \mathbb{F} \text{id} \\ &\equiv \oplus \circ \text{id} = \oplus \circ \mathbb{F} \text{id} \\ &\equiv \text{id} = \mathbb{F} \text{id} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f : \oplus \rightarrow_{\mathbb{F}} \odot &\equiv g \circ f \circ \oplus = \odot \circ \mathbb{F} (g \circ f) \\ &\equiv g \circ \otimes \circ \mathbb{F} f = \odot \circ \mathbb{F} (g \circ f) \\ &\equiv \odot \circ \mathbb{F} g \circ \mathbb{F} f = \odot \circ \mathbb{F} (g \circ f) \\ &\equiv \mathbb{F} g \circ \mathbb{F} f = \mathbb{F} (g \circ f) \end{aligned}$$