# Основы теории автоматического управления

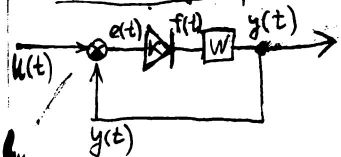
Ломов
Андрей
Александро

fitcontrol.narc

Дж. К. Максвелл, 1868г «О регуляторах»

И. А. Вышнеградский, 1876г «Об общей теории регуляторов»

<u>пример регулятора</u>:




автоматическое поддержание равновесия в системах

вычитатель:

$$e(t) \equiv u(t) - y(t), \quad \forall t$$

$$f(t) \equiv k \cdot e(t)$$

⊗ - вычитатель
⊗ - сумматор
K - система управления (настраивае
W - объект управления (неизм.)

1) пусть W: $y(t) \equiv W \cdot f(t)$, $K, W \in \mathbb{R}$
2) в общем случае W - оператор

Тогда $e = u - y = u - wf = u - kwe \Rightarrow e = \dfrac{u}{1+kW}$

$$\Rightarrow \boxed{y(u) = \frac{kW}{1+kW} \cdot u}$$

<u>Выводы</u>:

1) $\forall W \quad (k \to \infty) \Rightarrow (y \to u)$

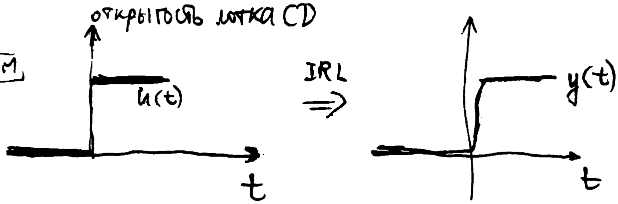
<u>цель</u>: добиться желаемого поведения выхода $(u(t))$, (реальное поведение - $y(t$

т.е. $y \to u$

или $\|y(t) - u(t)\| \to 0$

если $W \in \mathbb{R}$, то имеем <u>статический объект</u> (если $u(t) = const \Rightarrow y(t) = const$

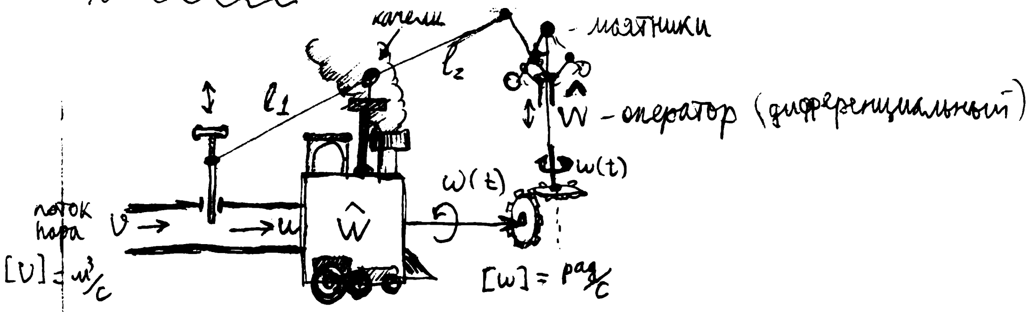
ПРИМ



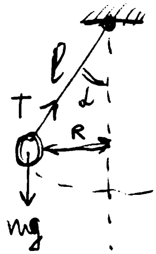

# Неустойчивость.

более сложные объекты управления - динамические

строим паровоз! с регулятором Уатта




Настройка подбор плечей $l_1/l_2$




$$\begin{cases} R = l \sin\alpha_0 \\ T\cos\alpha_0 = mg \\ T\sin\alpha_0 = \dfrac{m v_0^2}{R} = m w_0^2 R \end{cases}$$

$$w(t) = w_0 + \underbrace{\Delta w(t)}_{\text{возмущение (изменение)}}$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \overline{\Delta\alpha(t)}$$

(1) нужно: $\begin{cases} \|\Delta\alpha\| \ll \|\alpha_0\| \\ \|\Delta w\| \ll \|w_0\| \end{cases}$

$$\begin{cases} T\cos\alpha_0 = mg \\ T\cancel{\sin\alpha_0} = ml\omega_0^2\cancel{\sin\alpha_0} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{mg}{\cos\alpha_0} = ml\omega_0^2} \qquad (2)$$

при условии (1) раскл. в ряд Тэйлора $\alpha(t)$ и $\omega(t)$, получим

$$\frac{g}{\cos(\alpha_0+\Delta\alpha)} = l(\omega_0+\Delta\omega)^2 \Rightarrow \frac{g}{\cos\alpha_0} + \Delta\alpha(t) = l\omega_0^2 + W_1\cdot\Delta\omega(t) + O\left(\frac{\|\Delta\omega\|^2}{\|\omega_0\|^2}\right) + O\left(\frac{\|\Delta\alpha\|^2}{\|\alpha_0\|^2}\right) \qquad (3)$$

сделаем линеаризацию:

$$(2) \overset{\text{ряд Тэйлора}}{\Longleftrightarrow} (3)$$

$$(3) \overset{\text{отброс старших членов ряда при усл. (1)}}{\Longrightarrow} (4)$$

где 4: $\Delta\alpha(t) = W_1\cdot\Delta\omega(t)$ (4)

пусть $\Delta\omega(t) = W\cdot\Delta u(t)$

$$\Delta\alpha(t) = W_1 W\,\Delta u(t) \qquad (5)$$

$$\Big\downarrow\ ?\ \text{magic}$$

$$\Delta\alpha(t) + \beta(\Delta\dot\alpha(t)) + I\frac{d^2}{dt^2}(\Delta\alpha(t)) = W_1 W\,\Delta u(t) \qquad (6)$$

$$\beta(\Delta\dot\alpha(t)) = \beta\frac{d}{dt}(\Delta\alpha(t))$$

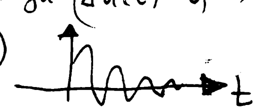
оправдание магии: пусть $\Delta u(t) = 0$ (перестали менять поток пара)

тогда (5) $\Rightarrow \Delta\alpha(t) = 0$ — но это же невозможно! в силу инертности маятников

на самом деле $\Delta\alpha(t) \to 0$

$\Rightarrow$ нужно добавить колебания в (5). тогда $(\Delta u(t) = 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\Delta\alpha(t) + \beta(\Delta\dot\alpha(t)) + I\,\Delta\ddot\alpha(t)) = 0)$



1) почему же 2й порядок? (производной) II закон Ньютона имеет 2й порядок.

$$m\ddot{\alpha} = f$$

2) ур-е. 2 порядка имеет колебательное затухающее решение, что и требуется.

$\Rightarrow$ такая модель нам подходит.

(7) $$\Delta\alpha(t) + \beta\frac{d}{dt}(\Delta\alpha(t)) + I\frac{d^2}{dt^2}(\Delta\alpha(t)) = W_1 W[\underbrace{\Delta\upsilon(t) - K\Delta\alpha(t-\tau)}_{\Delta u(t)}]$$

$K \equiv \frac{l_1}{l_2}$ const

$\tau$ - время задержки (увеличивается у изношенных систем)

## Моделирование задержки:

$$\Delta\alpha(t-\tau) \xrightarrow{\text{Тэйлор}} \underbrace{\Delta\alpha(t) - \frac{d\alpha}{dt}(\tau)} + O(\tau^2)$$

пусть $\tau \ll 1$

$$\left[I\frac{d^2}{dt^2} + \beta\frac{d}{dt} + 1\right]\Delta\alpha(t) = W_1 W\left[\Delta\upsilon(t) - (1 - \tau\frac{d}{dt})\Delta\alpha(t))\right]$$

(8) $$\Rightarrow \left[I\frac{d^2}{dt^2} + \underbrace{(\beta - W_1 W K\tau)}_{I_1}\frac{d}{dt} + \underbrace{(1 + W_1 W K)}_{I_0}\right]\Delta\alpha(t) = W_1 W\,\Delta\upsilon(t)$$

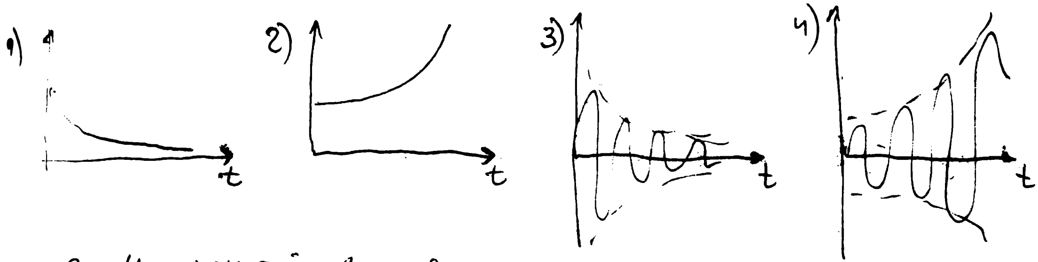
$$\boxed{I\frac{d^2\alpha(t)}{dt^2} + \underbrace{I_1\frac{d}{dt}\alpha(t)}_{\text{вязкое трение}} + I_0\alpha(t) = W_1 W\,\Delta\upsilon(t)}$$

вязкое трение (без него будет просто колебание без затуханий) пусть $\Delta U = 0$

## Устойчивость

$$I\Delta\ddot{\alpha} + I_1\Delta\dot{\alpha} + I_0\Delta\alpha = 0$$

какие возможны решения?




2 и 4 – неустойчивое движение

теор
без док-ва

~~если~~ $I, I_1, I_0$ имеют один знак $\Leftrightarrow$ решение $\Delta\alpha(t)$ $\forall$ нач. условий $\left(\Delta\alpha(0), \Delta\dot{\alpha}(0)\right)$ устойчиво.

---

$I$ – момент инерции $> 0$

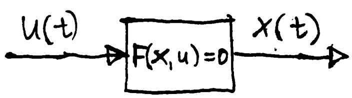
$I_0 = 1 + w_1 W K > 0$

$\Rightarrow$ нужно $I_1 > 0$

следствие: Регулятор (8) устойчив $\Leftrightarrow I_1 > 0 \Leftrightarrow \left(\beta > w_1 W K \tau\right)$

густая смазка и малый люфт

## Линеаризация уравнений.




нужно: построить линейное ур-е в нек. смысле „близко" к $F(x,u) = 0$ (1)

1) Пусть $\tilde{x}(t), \tilde{u}(t)$ – решения ур-я: $F(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t)) = 0 \quad \forall t \in [0; T]$

2) уточним: $F(x,u) \equiv F(x^{(n)}, \dots, x^{(0)}, u^{(m)}, \dots, u^{(0)})$, где $x^{(k)} = \dfrac{d^k x(t)}{dt^k}$

3) $\Delta X(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$

$\Delta u(t) = \tilde{u}(t) - u(t)$

и считаем, что $\|\Delta x(t)\| \ll \|x(t)\|$ и $\|\Delta u(t)\| \ll \|u(t)\|$

по опред. $\|x(t)\| = \max\limits_{t\in[0;T]} |x(t)|$

Получим ур-е для ф-ии $\Delta x(t), \Delta u(t)$.

пусть $a_i \equiv \dfrac{\partial F}{\partial x^{(i)}}$, $b_j \equiv \dfrac{\partial F}{\partial u^{(j)}}$

Разлагаем в ряд Тэйлора:

$$0 = F(\tilde{x}^{(n)}, \dots, \tilde{x}^{(0)}, \tilde{u}^{(m)}, \dots, \tilde{u}^{(0)}) = \underbrace{F(x^{(n)}, \dots, x^{(0)}, u^{(m)}, \dots, u^{(0)})}_{0} + \frac{\partial F}{\partial x^{(n)}} \Delta x^{(n)}(t) + \dots$$

$$\dots + \frac{\partial F}{\partial x^{(0)}} \Delta x^{(0)}(t) + \dots + \frac{\partial F}{\partial u^{(m)}} \Delta u^{(m)} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u^{(0)}} \Delta u^{(0)}(t) + \underbrace{O(\|\Delta x\|^2, \|\Delta u\|^2)}_{R}$$

$(\Delta x^{(n)} = (\Delta x)^{(n)})$

(2) $\Rightarrow \quad a_n \Delta x^{(n)} + \dots + a_0 \Delta x^{(0)} + b_m \Delta u^{(m)} + \dots + b_0 \Delta u^{(0)} + R = 0$

(3) $\quad a_n \Delta x^{(n)} + \dots + a_0 \Delta x^{(0)} + b_m \Delta u^{(m)} + \dots + b_0 \Delta u^{(0)} = 0$

---

$(1) \Leftrightarrow (2) \quad (2) \not\Leftrightarrow (3)$

но при $\|\Delta x\|, \|\Delta u\| \to 0 \quad R \to 0$

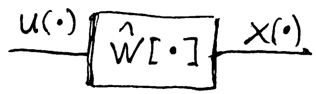
и в этом смысле $(3) \to (2)$ (только вид уравнения)

**Опр** Ур-е (3) при условии $\|\Delta x\| \to 0$, $\|\Delta u\| \to 0$ называется **линеаризацией** ур-я (1)

Далее работаем только с линейными ур-ями.

**ОПР** Ур-е (3) $a_n(t)x^{(n)}(t)+\dots+a_0(t)x^{(0)}(t)=b_m(t)u^{(m)}(t)+\dots+b_0(t)u^{(0)}(t)$

называется <u>стационарным</u> (автономным), если $a_n(t)\equiv a_n$ (не зависит от времени)

(3) $\overset{\text{обозн.}}{\Longleftrightarrow}$ 


$$x(\cdot)=\hat{W}[u(\cdot)]$$

↑ оператор

оператор $\hat{W}$ назыв. <u>линейным</u>, если:

1) $\hat{W}[0]=0$

2) $\hat{W}[\alpha u_1(\cdot)+\beta u_2(\cdot)]=\alpha\hat{W}[u_1(\cdot)]+\beta\hat{W}[u_2(\cdot)]$

<u>принцип суперпозиции:</u>

пусть даны ур-я $a_n\tilde{x}^{(n)}+\dots+a_0\tilde{x}^{(0)}=\tilde{u}(t)$ $(\tilde{4})$

$a_n\tilde{\tilde{x}}^{(n)}+\dots+a_0\tilde{\tilde{x}}^{(0)}=\tilde{\tilde{u}}(t)$ $(\tilde{\tilde{4}})$

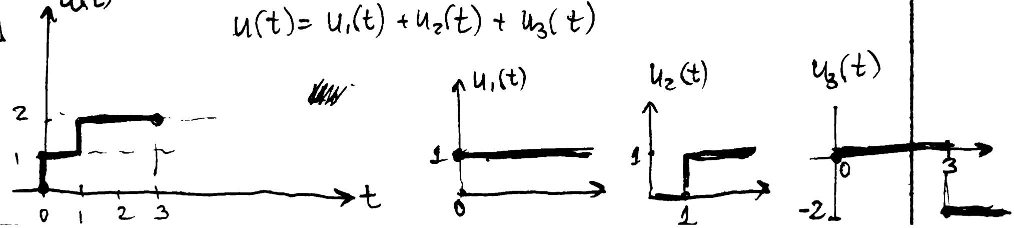
**УТВ** $x(t)=\tilde{x}(t)+\tilde{\tilde{x}}(t)$ – частное решение ур-я

$a_nx^{(n)}+\dots+a_0x^{(0)}=u(t)\equiv\tilde{u}(t)+\tilde{\tilde{u}}(t)$

<u>очевидно!</u> прямой подстановкой.

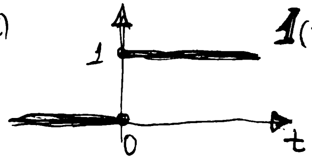
**Следствия** при разложении „сложной" правой части $u(t)$ на „простые" $\tilde{u}(t)$ и $\tilde{\tilde{u}}(t)$ решение получается, как сумма „простых" решений.

**ПРИМ** $u(t)=u_1(t)+u_2(t)+u_3(t)$



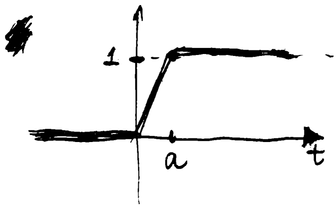
# Элементарные ф-ии правой части:

1)



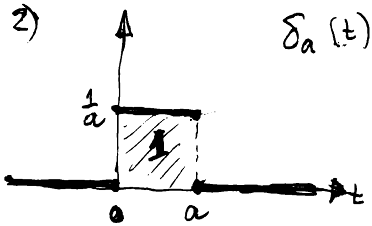

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

(ф-ия Хэвисайда)




$\mathbb{1}_a(t)$

2)




$$\delta_a(t) = \frac{d}{dt}\mathbb{1}_a(t)$$

при $a \to 0$ $\quad \mathbb{1}_a(t) \Rightarrow \mathbb{1}(t)$

$$\delta_a(t) \to \delta(t)$$

$$\mathbb{1}(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau$$

ОПР $\quad \hat{W}[\mathbb{1}(t)] \equiv h(t)$ — переходная характеристика

$\hat{W}[\delta(t)] = w(t)$ — импульсная характеристика (отклик)

---

УТВ $\quad h(t) = \int_{0}^{t} w(\tau)\,d\tau \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}h(t) = w(t)$

док-во $\quad h(t) = \hat{W}[\mathbb{1}(t)] = \hat{W}\left[\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau\right] =$

$$= \int_{-\infty}^{t} \underbrace{\hat{W}[\delta(\tau)]}_{w(\tau)}\,d\tau = \int_{-\infty}^{t} w(\tau)\,d\tau = \int_{0}^{t} w(\tau)\,d\tau$$

$\boxed{\text{Утв}}$ (разложение $u(t)$ на элементарные $\delta$-функции)

Пусть $|u(t)|< C$ и $\exists \lim\limits_{t\to-\infty}|u(t)|<\infty$, тогда

$$u(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(t')\delta(t-t')dt'$$

---

$\boxed{\text{док-во}}$ 1) $\int_a^b u\dot{v} = uv\Big|_a^b - \int_a^b \dot{u}v$

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{u(\tau)}_{\equiv u(\tau)}\underbrace{\delta(t-\tau)}_{\equiv \dot{v}(\tau)}d\tau = [\,v(\tau)=-\mathbb{1}(t-\tau)\,] = \underbrace{-u(\tau)\,\mathbb{1}(t-\tau)\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{\underbrace{-u(\infty)\mathbb{1}(t-\infty)+u(-\infty)\mathbb{1}(t+\infty)}_{u(-\infty)}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\dot{u}(\tau)\overbrace{\mathbb{1}(t-\tau)}^{=0,\ \tau>t}d\tau}_{\int_{-\infty}^{t}\dot{u}(\tau)d\tau}$$

$= \cancel{u(-\infty)}+u(t)-\cancel{u(-\infty)} = u(t).$ $\square$

---

$\boxed{\text{следствие}}$: $x(t)=\hat{W}[u(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)w(t-\tau)d\tau = \int_0^t u(\tau)w(t-\tau)d\tau$, при $\left(\begin{array}{l} w(t)=0 \\ \text{при } t<0 \\ u(t<0)=0\end{array}\right)$

$\boxed{\text{док-во}}$ $x(t)=\hat{W}[u(t)] = \hat{W}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\,\delta(t-\tau)d\tau\right] =$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)\underbrace{\hat{W}[\delta(t-\tau)]}_{w(t-\tau)}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)w(t-\tau)d\tau = \int_0^t u(\tau)w(t-\tau)d\tau$$

$\boxed{\text{опр}}$ свёртка

$x(\cdot)$ - свёртка $u(\cdot)$ и $w(\cdot)$, если

$$x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}u(\tau)w(t-\tau)d\tau \equiv u(\cdot)*w(\cdot)$$

## св-ва свёртки

1) $u(\cdot) * w(\cdot) \underset{\text{тожд}}{=} w(\cdot) * u(\cdot)$

<u>док-во</u>: $$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\, w(t-\tau)\, d\tau = \left[\begin{array}{l} t' = t-\tau \\ \tau = t-t' \\ d\tau = -dt' \end{array}\right] = \int\limits_{t'=\infty}^{t'=-\infty} u(t-t')\, w(t')\,(-dt') =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(t')\, u(t-t')\, dt'. \quad \square$$

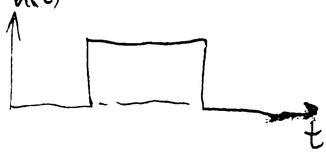
2) если $u, w \neq 0 \Leftrightarrow t \geq 0$, то

$$u(\cdot) * w(\cdot) = \int\limits_0^t u(\tau)\, w(t-\tau)\, d\tau = \int\limits_0^t w(t')\, u(t-t')\, dt' = w(\cdot) * u(\cdot)$$

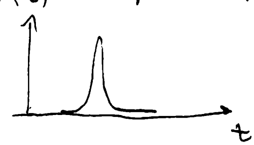
<u>док-во</u>: простота!

(прим) свёртка на $(-\infty; +\infty)$

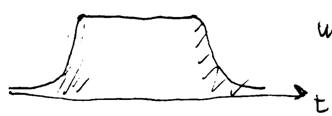
$u(t)$



$w(t)$ — аппаратная ф-ия (точка)



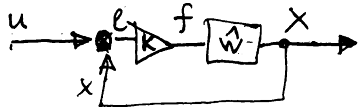
результат:



изобр. в оптическом приборе

# Типовые регуляторы (настройка)

1) Пропорц. регуляторы



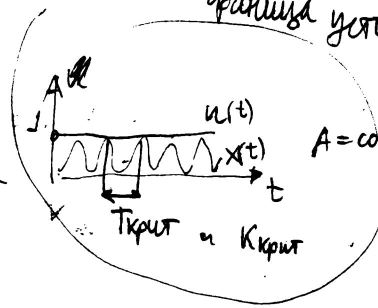

$e \equiv u - x$

$f \equiv K \cdot e$

настройка: подбор $K$.

цель: $x(t) \to u(t)$

граница устойчивости




$A = \mathrm{const}$

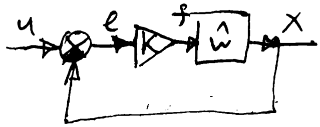
Настройка по Никольсу:

1) найти $K_{крит}$ на границе устойчивости подбором

2) $K \equiv \dfrac{K_{крит}}{2} = K_{ник}$

обоснование: пусть

$$\hat{w} = \frac{e^{-\tau\left(\frac{d}{dt}\right)}}{\left(\frac{d}{dt}\right)}, \quad \hat{s} \equiv \frac{d(\cdot)}{dt}$$




$$x = \frac{e^{-\tau\hat{s}}}{\hat{s}} f, \qquad \hat{s}x = e^{-\tau\hat{s}} f \underset{\text{Тейлор}}{\approx} \left[1 - \tau\hat{s} + \frac{\tau^2}{2}\hat{s}^2\right] f$$

$$\dot{x} \approx f - \tau\dot{f} + \frac{\tau^2}{2}\ddot{f}, \qquad f = k(u - x), \quad u = 1$$

$$\Rightarrow \dot{x} = k(1 - x) + \tau k\dot{x} - \frac{\tau^2}{2}k\ddot{x}, \quad t > 0$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\left(\frac{1 - \tau k}{\frac{\tau^2}{2}k}\right)}_{a_1}\dot{x} + \underbrace{\left(\frac{k}{\frac{\tau^2}{2}k}\right)}_{a_0}x = \left(\frac{k}{\frac{\tau^2}{2}k}\right)$$

характ. ур-е: $\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$

решение: $-\dfrac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\dfrac{a_1}{2}\right)^2 - a_0} = \lambda_{1,2}$

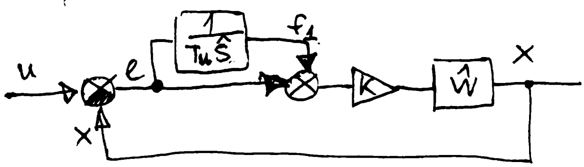
устойчива, когда $\mathrm{Re}\,\lambda < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \boxed{a_1 > 0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(0 < \tau k < 1\right)$

граница устойчивости: $\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 = a_0 \quad \left(\tau k_{крит} = 1\right)$

$$\tau k = \frac{1}{2} \Rightarrow K = \frac{K_{крит}}{2}$$

2) ПИ-регулятор (пропорц.-интегрирующий).




$\hat{s} \equiv \frac{d}{dt}$

$T_u$ ← буква „и"

звено интегрирования:

$$e \to \boxed{\frac{1}{T_u \hat{s}}} \to f_1 = \frac{1}{T_u \hat{s}} e \quad \Leftrightarrow \quad T_u \hat{s} f_1 = e$$

$$\boxed{T_u \frac{d}{dt} f_1(t) = e(t)}$$

$$f_1(t) = \frac{1}{T_u} \int_0^t e(\tau)\, d\tau$$

параметры настройки: $K, T_u$

## Настройка ПИ-рег. по Никольсу

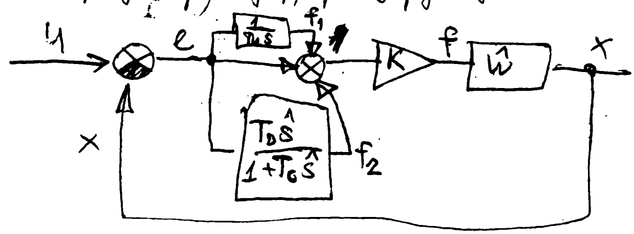
Найти $K$ и $T_u$: рег. был устойчивый.

1) выбрасываем звено интегрирования, находим $K_{крит}$.

2) по Никольсу $K = 0{,}45 \cdot K_{крит}$

$$T_u = \frac{T_{крит}}{1{,}2}$$

(ПИД-регулятор) +дифференцирующий

3) 

$$f = K(e + f_1 + f_2)$$

$$f_2 = \frac{T_D\hat{S}}{1+T_c\hat{S}}e \rightarrow (1+T_c\hat{S})f_2(t) = T_D\hat{S}e(t) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{f_2(t) + T_c\frac{d f_2(t)}{dt} = T_D\frac{de(t)}{dt}}$$

а вот и дифференцирование

<u>параметры</u>: $\boxed{K, T_u}, T_D, T_c$

но настр. только эти, остальные заранее подобраны и вычисляются

<u>Настройка по Никольсу</u>

1) —||— и дифф. звено тоже, находим $K_{крит}$ и $T_{крит}$

2) $K = 0{,}6\,K_{крит}$

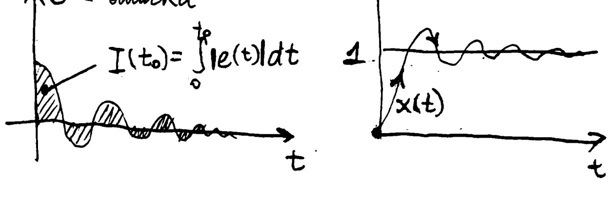
$T_u = \frac{T_{крит}}{2}$

$T_D = \frac{T_u}{4}$ $\quad T_c = \frac{T_D}{8}$

---

Сравниваем ПИ и ПИД

<u>критерий качества регулятора</u> (интегральный критерий)




$e \equiv u - x$

Критерием качества назовём $I \equiv I(\infty) \equiv \lim_{t_0\to\infty} I(t_0)$

для устойчивых регуляторов линейного объекта этот интеграл сходится (предел конечен)

<u>док-во</u>: позже.

оптимизация регулятора:

$$I = I(K, T_и) \to \min_{K, T_и}$$

① <u>покоорд. спуск</u>

1) $K^{(0)} = K(\text{николь}с)$

$T_и^{(0)} = T_и(\text{николь}с)$

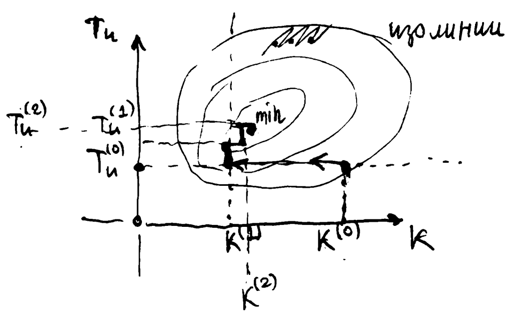
2) шаг по $K$:

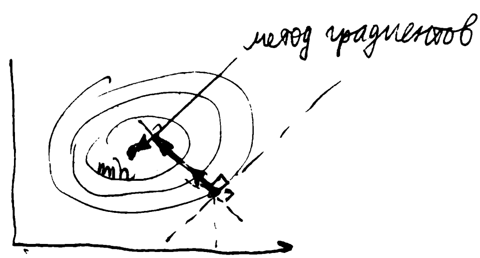
$$K^{(1)} = \arg\min_K I(K, T_и^{(0)})$$

шаг по $T_и$:

$$T_и^{(1)} = \arg\min_{T_и} I(K^{(1)}, T_и)$$

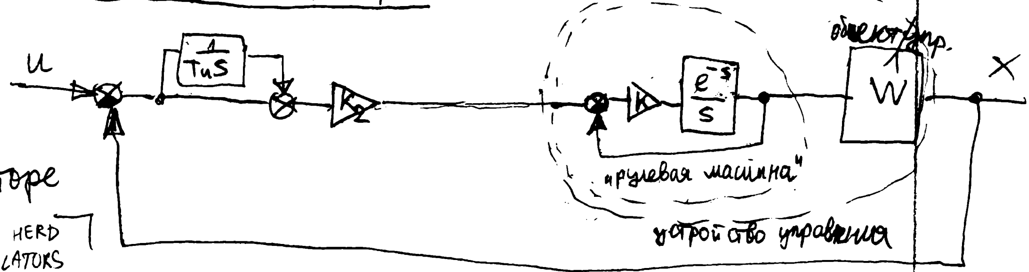
3) аналогично $K^{(2)}, T_и^{(2)}$




для ПИД-рег. вычисляем $T_D = T_и/4$, $T_c = T_D/8$ на каждом шаге

# Настройка каскадных регуляторов




регулятор в регуляторе

YO DAWG I HERD
U LIKE REGULATORS
SO WE PUT A REGULATOR
IN YOUR REGULATOR
SO YOU CAN REGULATE
WHILE YOU REGULATE

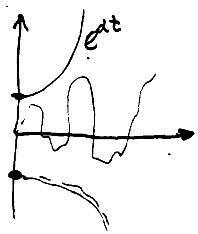
настройка:

1) независимая настройка внутр. регулятора $K = K_*$
2) настр. $T_и$ и $K_2$ для внешн. регулятора при фикс. $K = K_*$

# Преобразование Лапласа

пусть дана ф-ия $x(t)$, $t \in [0; +\infty)$ : $|x(t)| < e^{\alpha t}$, где $\alpha > 0$

$\alpha$ - задано




опр $\hat{L}[x(t)] \equiv \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} x(\tau)\, d\tau$, где

$s \in \mathbb{C}$ : $Re(s) > \alpha$, $s$ - параметр

$\boxed{\hat{L}[x(t)] \equiv X(s)}$ - образ Лапласа ф-ии $x(t)$

свойства:

1) $\hat{L}[a x_1(t) + b x_2(t)] = a X_1(s) + b X_2(s)$

2) $\hat{L}[\dot{x}(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} \dot{x}(\tau)\, d\tau = e^{-s\tau} x(\tau) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} (-s) e^{-s\tau} x(\tau)\, d\tau =$

$= (0 - x(0)) + s\hat{L}[x(t)] = s\hat{L}[x(t)] - x(0) = \boxed{sX(s) - x(0)}$

3) пусть $i(t) \equiv \int_0^t x(\tau)d\tau \Leftrightarrow \dot{x}(t) = \dot{i}(t) \overset{\hat{L}}{\Rightarrow}$

$$\overset{\hat{L}}{\Rightarrow} X(s) = sI(s) - \underbrace{i(0)}_{0 \text{ (по опр.)}}$$

$$\Rightarrow I(s) = \frac{1}{s}X(s)$$

4) $$\hat{L}_{\alpha \in \mathbb{C}}[e^{-\alpha t}] = \int_0^{+\infty} e^{-(s+\alpha)\tau} d\tau = \frac{1}{s+\alpha}$$

5) $$\hat{L}[\mathbb{1}(t)] = \hat{L}[e^{-\alpha t}]_{\alpha=0} = \frac{1}{s}$$

6) $$\hat{L}[x(t-t_0)] = \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} x(\tau-t_0)d(\tau-t_0) = \int_0^{+\infty} e^{-s(\tau-t_0)} e^{-st_0} x(\tau-t_0)d(\tau-t_0)$$

$$= e^{-st_0}\int_0^{+\infty} e^{-s(\tau-t_0)} x(\tau-t_0)d(\tau-t_0) = e^{-st_0}\int_{-t_0}^{+\infty} e^{-st'} x(t')dt' =$$

$$= [x(t')=0 \text{ при } t'<0] = e^{-st_0}\int_0^{+\infty} e^{-st'}x(t')dt' =$$

$$= \boxed{e^{-st_0}X(s)}$$

$$\boxed{e^{-st_0} \approx 1 - st_0 + \frac{s^2t_0^2}{2} - \ldots}$$ оператор задержки по времени

7) образ свёртки двух функций

пусть $x(t) = \int_0^{+\infty} u(t')w(t-t')dt' = u * w$

тогда $$\hat{L}[x(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-s\tau}\underbrace{\left(\int_0^{+\infty} u(t')w(\tau-t')dt'\right)}_{x(\tau)}d\tau =$$

$$= \int_0^{+\infty} u(t')\underbrace{\left(\int_0^{+\infty} e^{-s\tau}w(\tau-t')d\tau\right)}_{e^{-st'}W(s)}dt' =$$

$$= W(s)\underbrace{\int_0^{+\infty} u(t')e^{-st'}dt'}_{U(s)} = W(s)U(s).$$

$$\boxed{\hat{L}(u * w) = U(s)\cdot W(s)}$$

$\boxed{\text{ОПР}}$ образ Лапласа импульсной функции $w(t)$ называется <u>передаточной функцией</u>.

<u>итак</u>: $h(t)$ - переходная
$w(t)$ - импульсная
$W(s)$ - передаточная

обозн. $H(s) = \hat{L}[h(t)]$

$\boxed{\text{УТВЕРЖД.}}$ $H(s) = \frac{1}{s}W(s)$

<u>док-во</u>:

1) $h(t) = \int_0^t w(\tau)\,d\tau \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s}W(s)$ (5е свойство)

2) $u(t) = 1\!\!1(t)$

$$\xrightarrow{\;u(t)=1\!\!1(t)\;} \boxed{\begin{matrix}W(s)\\ w(t)\end{matrix}} \xrightarrow{\;x(t)\;}$$

$x(t) = w(t) * u(t)$

$X(s) = W(s)\cdot U(s)$.

по св-ву 6 (6?)

$U(s) = \frac{1}{s}$. в случае $u \equiv 1$

$x(t) = h(t)$

$\Rightarrow H(s) = W(s)\cdot\frac{1}{s}$. □

<u>Передаточные функции простейших звеньев</u>

1) Апериодическое звено: $RC\dot{x}(t) + x(t) = u(t)$

$$RCsX(s) \cancel{-RCX(0)} + X(s) = U(s)$$

пусть $X(0)=0 \Rightarrow RCsX(s) + X(s) = U(s)$

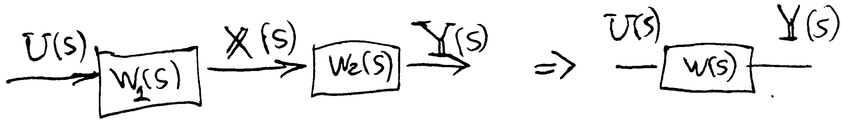
$$W(s) \overset{df}{=} \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+RCs}$$

2) $a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_0 x^{(0)}(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_0 u^{(0)}(t)$

при
$$\begin{cases} x(0)=0 & u(0)=0 \\ x'(0)=0 & \vdots \\ \vdots & \\ x^{(n-1)}(0)=0 & u^{(m-1)}(0)=0 \end{cases}$$

ответ: $W(s) = \dfrac{X(s)}{U(s)} = \dfrac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$

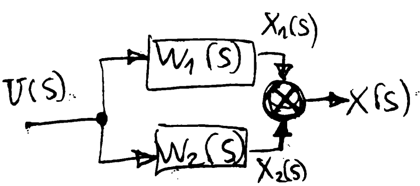
## Послед. соед. двух звеньев




где $W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s)$

доказать.

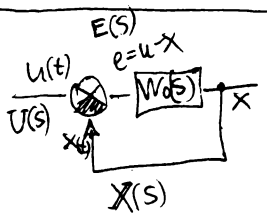
## Паралл. соед. двух звеньев



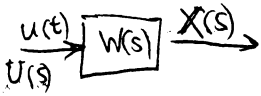

$W(s) \equiv \dfrac{X(s)}{U(s)} = W_1(s) + W_2(s)$

доказать.

дано:




нужно построить перед. ф-цию W так, чтобы она действовала так же, но без обратной связи:




$X(s) = W_0(s) \cdot E(s)$

$E(s) = U(s) - X(s)$

$$X(s) = W_0(s)\,[U(s) - X(s)]$$

$$[1 + W_0(s)]\,X(s) = W_0(s)\,U(s)$$

$$X(s) = \underbrace{\frac{W_0(s)}{1 + W_0(s)}}_{W(s)} \cdot U(s)$$

win

(8) <u>первая предельная теорема</u>

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)$$

<u>Док-во:</u> $L[\dot{x}(t)] = \int_0^{+\infty} \underbrace{e^{-s\tau}}_{\to 1} \dot{x}(\tau)\,d\tau$ = (по частям) = $sX(s) - x(0)$

пусть $s \to 0$, тогда

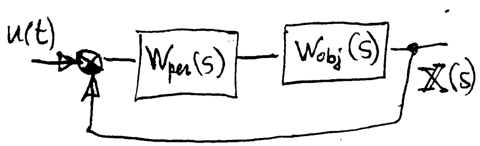
$$x(+\infty) - \cancel{x(0)} = \lim_{s\to 0} sX(s) - \cancel{x(0)}$$

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX(s)}$$ □

**Следствие 1** пусть дана система управления:

$u(t) = 1(t)$

$U(s) = \frac{1}{s}$




пусть $W_{рег}(s) = K$

пусть $W_{obj}(s) = \frac{e^{-s}}{s}$ — (как бэ мотор)

пусть регулятор настроен! (устойчивый)

т.е. при $t \to +\infty$ $|x(t)| < C < +\infty$ $(c \geq 0)$

Тогда $x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathbb{1} = u(t)$

<u>Док-во</u>: $$X(s) = \frac{W_0(s)}{1+W_0(s)} U(s)$$

(где $W_0(s) \equiv (W_{рег} \circ W_{obj})(s)$)

$$= \frac{W_{рег} \cdot W_{obj}}{1 + W_{рег} \cdot W_{obj}} \cdot \frac{1}{s}$$

<u>по теореме</u> $$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s X(s) =$$

$$= \lim_{s\to 0} \cancel{s} \cdot \frac{W_{рег} \cdot W_{obj}}{1 + W_{рег} \cdot W_{obj}} \cdot \frac{1}{\cancel{s}} = \lim_{s\to 0} \frac{k e^{-s}/s}{1 + k e^{-s}/s} = \lim_{s\to 0} \frac{k \frac{1}{s}}{\underbrace{1}_{\text{пренебрегаем}} + k\frac{1}{s}} =$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{k\frac{1}{s}}{k\frac{1}{s}} = 1 \qquad \square$$

$\boxed{\text{Следствие 2}}$ в условии <u>следствия 1</u> заменим:

$$W_{obj} = \frac{e^{-s}}{s+1}, \quad \text{тогда}$$

любое $L$

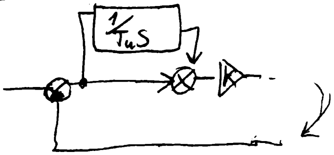
$$\lim_{t\to+\infty} x(t) \neq 1 \qquad \text{(П-регулятор не работает)}$$

<u>Док-во</u>: то же самое

$$\ldots = \lim_{s\to 0} \frac{k \frac{e^{-s}}{s+1}}{1 + k\frac{e^{-s}}{s+1}} = \lim_{s\to 0} \frac{k\frac{1}{s+1}}{1 + k\frac{1}{s+1}} = \frac{k}{1+k} \neq 1$$

$\square$

**следствие 3** в условиях следствия 2 $W_{рег}(s) = K\left(1+\frac{1}{T_и s}\right)$,




тогда $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 1$ (а ПИ-регулятор работает!)

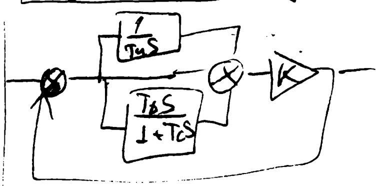
док-во:

$$\ldots = \lim_{s\to0} \frac{W_{рег}\frac{e^{-s}}{s+1}}{1+W_{рег}\frac{e^{-s}}{s+1}} = \lim_{s\to0}\frac{K(\overbrace{1}^{пренебр}+\overbrace{\frac{1}{T_и s}}^{\infty})\frac{e^{-s}}{s+1}}{1+K(\underbrace{1}_{пренебр}+\underbrace{\frac{1}{T_и s}}_{\to\infty})\underbrace{\frac{e^{-s}}{s+1}}_{\to const}} = \lim_{s\to0}\frac{K\frac{1}{T_и s}\cdot 1}{1+K\frac{1}{T_и s}\cdot 1} =$$

$= 1.$ □

---

**следствие 4** в условиях следствия 3 пусть $W_{рег}(s) = \left(1+\frac{1}{T_и s}+\frac{T_д s}{1+T_c s}\right)$




тогда $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 1.$ (ПИД тоже работает)

док-во: следует из того, что при $s\to0$ $W_{ПИД}(s)\to W_{ПИ}(s)$

(ибо $\frac{T_д s}{1+T_c s}\xrightarrow[s\to0]{}0$) □

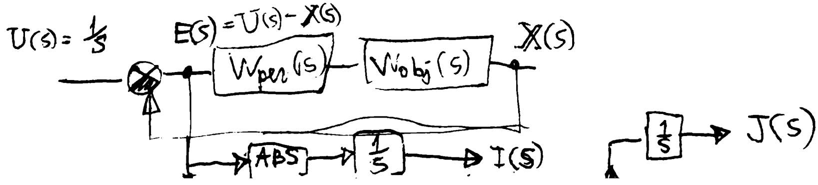
---

Оценка снизу для интегрального качества регулирования

$e(t) = u(t) - x(t)$

$i(t) = \int\limits_0^t |e(\tau)|d\tau$, тогда интегр. критерий качества:

$i(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty} i(t) \underset{теор}{=} \lim\limits_{s\to0} sI(s) = ?$



$\boxed{\text{УТВ}}$ пусть $j(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau \le i(t)$ и регулятор устойчивый,

$\left(j(t) = i(t) \iff \forall t \;\; e(t) \ge 0\right)$

тогда $i(\infty) \geq j(\infty) = \frac{T_u}{K} \cdot \frac{\alpha_0}{\beta_0}$, где

$$W_{рег}(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_u s}\right)$$

$$W_{obj}(s) = \frac{\beta_m s^m + \beta_{m-1} s^{m-1} + \ldots + \beta_0}{\alpha_n s^n + \ldots + \alpha_0}$$

док-во:

$$j(\infty) = \lim_{s\to 0} sJ(s) =$$

$$\left[J(s) = \frac{1}{s}E(s) = \frac{1}{s}\left(U(s) - \cancel{X}(s)\right) = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}W(s)\right)\right]$$

$$= \lim_{s\to 0}\left(\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s}\cdot\frac{\left(\frac{K}{T_u s}\cdot\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)}{1 + \left(\frac{K}{T_u s}\cdot\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)}\right)\right) =$$

$$\left[\text{здесь } \lim_{s\to 0}\left(\frac{K}{T_u s}\right) = \lim_{s\to 0}\left(W_{рег}(s)\right),\quad \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \lim_{s\to 0}\left(W_{obj}(s)\right)\right]$$

$$= \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}\left(\frac{1}{1 + \frac{K}{T_u s}\cdot\frac{\beta_0}{\alpha_0}}\right) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s + \frac{K}{T_u}\cdot\frac{\beta_0}{\alpha_0}} = \frac{T_u \alpha_0}{K\beta_0}. \qquad \square$$

выводы: 1) если $K$ - мало, то $j(\infty)$ велико и $i(\infty)$ тоже.
Такие объекты плохо регулируются.

2) если $\beta_0$ - мало, то тоже.

# ③ Вторая предельная теорема.

$$\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{s\to\infty} s X(s)$$

Док-во: $L[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0)$

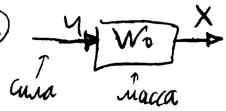
$$\lim_{s\to\infty}\int_0^\infty e^{-s\tau}\dot{x}(\tau)\,d\tau = \lim_{s\to\infty} sX(s) - x(0)$$

$$|e^{-s\tau}|\to 0$$

$$0 = \lim_{s\to\infty} sX(s) - \lim_{t\to 0} x(t)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{s\to\infty} sX(s). \quad \square$$

~~следствие~~ ПРИМЕР ①

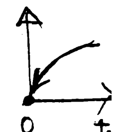



$u = m\ddot{x}$, $\quad x(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$

$$U(s) = m s^2 X(s)$$

пусть $u(t) = 1(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s}$, тогда $X(s) = \frac{1}{ms^2}\frac{1}{s} = \frac{1}{ms^3}$.

~~найдём x(0)?~~ нет! $\lim_{t\to 0} x(t) \underset{\text{Теор}}{=} \lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{ms^2} = 0$



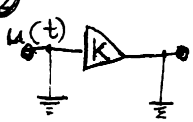

т.е. для всех физических объектов $\boxed{\lim_{t\to 0+0} x(t) = x(0)}$

т.е. нет разрыва в нуле

при $u(t) = 1(t)$ то $x(t) = h(t)$

это определение физического (инерционного) объекта

ПРИМЕР ②




$$x(t) = K\cdot u(t)$$

$$X(s) = KU(s)$$

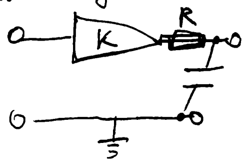
$$\Rightarrow W(s) = K$$

$$\Rightarrow H(s) = L(h(t)) = \frac{1}{s}W(s) = \frac{K}{s}$$

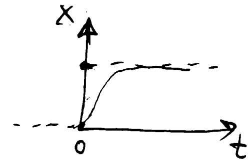
по 2й теореме $\lim\limits_{t\to 0} h(t) = \lim\limits_{s\to+\infty} sH(s) = \lim\limits_{s\to\infty} s\cdot\frac{K}{s} = K \neq 0$

$\Rightarrow$ объект $K$ „физически нереализуем". Как же так?

реальный усилитель:




$W(s) = K\cdot\frac{1}{1+RC\cdot s}$




$\boxed{\text{упр}}$ проверить: $h(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$.

Такой усилитель реализуем.

## Обращение преобр. Лапласа

$\boxed{\text{свойство (10)}}$ пусть $X(s) \doteqdot x(t)$, тогда $e^{\alpha t}\cdot x(t) \doteqdot X(s-\alpha)$, $\alpha, s\in\mathbb{C}$

обозн. образа Лапласа

док-во: упр.

Пусть $H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{p_m s^m + \ldots + p_0}{q_n s^n + \ldots + q_0}$, $m<n$

тогда $W(s) = sH(s)$.

$\boxed{\text{Задача}}$: найти $h(t) \doteqdot H(s)$.

решение: 1) частный случай: корни $q(s)\in\mathbb{R}$ и все разные

2) частный случай: корни $q(s)\in\mathbb{R}$, но могут быть кратные.

3) частный случай: $q(s)$ - комплексные (не рассматриваем)

1) разложим $H(s)$ на элементарные дроби

$q(s) = (s-s_1)(\ldots)(s-s_n)$, $s_i \neq s_j \in \mathbb{R}$

$H(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A_1}{s-s_1} + \frac{A_2}{s-s_2} + \dots + \frac{A_n}{s-s_n}$

$A_i$ = чему-то

из св-ва 4 $\Rightarrow$ $\frac{1}{s-s_1} \doteqdot e^{s_1 t}$

из св-ва 1 $\Rightarrow$ $h(t) = A_1 e^{s_1 t} + \dots + A_n e^{s_n t}$

найдем $A_i \in \mathbb{R}$:

$H(s) \xrightarrow[s \to s_i]{} \frac{A_i}{s-s_i}$

$\downarrow$

$\frac{p(s_i)}{q(s_i)}$

$\Rightarrow$ ~~$h(t) \doteqdot H(s)$~~, ~~$h(t) =$~~

$\boxed{\text{ПРИМ}}$: $H(s) = \frac{s-1}{s(s-2)(s-3)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-2} + \frac{A_3}{s-3}$

$\lim_{s \to 0} H(s)$: $\frac{-1}{s(-2)(-3)} \Rightarrow A_1 = \frac{-1}{(-2)(-3)} = \frac{1}{6}$

$s \to 2$: $\frac{1}{2(s-2)(-1)} = \frac{A_2}{s-2}$

$\Rightarrow A_2 = -\frac{1}{2}$

$s \to 3$: $\frac{3-1}{3(3-2)(s-3)} = \frac{A_3}{s-3} \Rightarrow A_3 = \frac{2}{3}$

$h(t) = \left(-\frac{1}{6} e^{0 \cdot t} - \frac{1}{2} e^{2t} + \frac{2}{3} e^{3t}\right) \mathbb{1}(t)$ предполагаем $t > 0$

2) действ кратные корни

$q(s) = (s-s_1)^{k_1} \dots (s-s_l)^{k_l}$

$k_1 + \dots + k_l = n$

$\boxed{\text{УТВ}}$ (без док-ва)

$$H(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{A_{11}}{(s-s_1)} + \frac{A_{12}}{(s-s_1)^2} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(s-s_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{l1}}{(s-s_l)} + \dots + \frac{A_{lk_l}}{(s-s_l)^{k_l}}$$

нахождение коэфф-тов $A_{11} \dots A_{lk_l}$: через приведение суммы справа к общ. знам и сравнением с дробью $\frac{p(s)}{q(s)}$ слева.

$\boxed{\text{ПРИМ}}$ $H(s) = sW(s) = s\frac{1}{(1+s)^2}$. (упр)

УТВ $\quad \frac{1}{(s-\alpha)^m} \doteqdot e^{\alpha t}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$

док-во: 1) $\quad \mathbb{1}(t) \doteqdot \frac{1}{s}$ (св-во 5)

$$t = \int_0^t \mathbb{1}(\tau)\,d\tau \doteqdot \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}$$

$$\frac{t^2}{2} = \int_0^t \tau\, d\tau \doteqdot \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s}$$

$$\vdots$$

$$\frac{t^{m-1}}{(m-1)!} \doteqdot \frac{1}{s^m}$$

по св-ву 9 $\quad \frac{1}{(s-\alpha)^m} \doteqdot e^{\alpha t}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}$ $\quad\square$

# Устойчивость

(1) ОПР пусть $x(t)$ – решение ур-я $\quad a_n x^{(n)} + \dots + a_0 x(t) = u(t)$

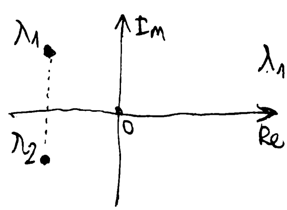
Решение $x(t)$ – устойчиво, если $\lim\limits_{t\to+\infty}|x(t)| = 0$

ОПР ур-е (1) – устойчиво, если $\forall u(t): |u(t)| < C$ соотв. решение устойчиво.

УТВ (1) пусть $n = 2$, тогда ур-е (1) устойчиво

$\Leftrightarrow$ $\begin{matrix} \operatorname{Re}\lambda_1 < 0 \\ \operatorname{Re}\lambda_2 < 0 \end{matrix}$, где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ – корни $a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$

док-во: с помощью дискриминанта, легко.




$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

$\boxed{\text{УТВ}}$ ② для $n \geq 3$ ур-е (1) устойчиво $\Leftrightarrow$ все корни хар. многочл. $\chi(\lambda)$ лежат в левой комплексной полуплоскости.

$\boxed{\text{упр}}$ показать, что неуст. при $\lambda = 0$ и $n = 1$.

$\boxed{\text{док-во}}$ 1) $\chi(\lambda) = (a_{10} + a_{11}\lambda + a_{12}\lambda^2)(a_{20} + a_{21}\lambda + a_{22}\lambda^2) \cdot \ldots \cdot (a_{n0} + a_{n1}\lambda)$
(можно разложить $\chi$ на сомножители степени $\leq 2$)

2) будем говорить, что многочлен $\chi(\lambda)$ <u>устойчив</u>, если $((\chi(\lambda) = 0) \Rightarrow (\mathrm{Re}\,\lambda < 0))$

Факт: многочлен $\chi(\lambda)$ устойчив $\Leftrightarrow$ устойчивы все его сомножители вида $(a_{i0} + a_{i1}\lambda + a_{i2}\lambda^2)$ степени $\leq 2$

Основная <u>трудность</u> в том, чтобы связать устойчивость $\chi(\lambda)$ с устойчивостью ур-я (1) [докажем позже]

$\boxed{\text{УТВ}}$ ур-е (1) устойчиво $\Leftrightarrow$ устойчив $\chi(\lambda)$

$\boxed{\text{УТВ}}$ пусть $\lambda_1 \ldots \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ – корни $\chi(\lambda)$. $\chi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n)$

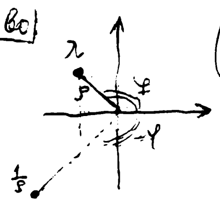
определим $\bar{\chi}(\mu) = a_0\mu^n + a_1\mu^{n-1} + \ldots + a_n$, тогда $\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \mu_n = \frac{1}{\lambda_n} \in \mathbb{C}$ являются корнями $\bar{\chi}(\mu) = 0$

$\boxed{\text{док-во}}$ $\chi(\lambda) = \lambda^n \left(a_n + a_{n-1}\frac{1}{\lambda} + \ldots + \frac{a_0}{\lambda^n}\right) = \left[\text{пусть } \mu = \frac{1}{\lambda}\right] = \lambda^n \bar{\chi}(\mu)$

$\Rightarrow \chi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^n \bar{\chi}(\mu) = 0 \underset{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} \bar{\chi}(\mu) = 0.$ $\square$

<u>следствие</u>: многочлен $\chi(\lambda)$ – устойчив $\Leftrightarrow$ устойчив $\bar{\chi}(\lambda)$

$\boxed{\text{док-во}}$




(если $\lambda = \rho e^{i\varphi}$, то $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\rho} e^{-i\varphi}$)

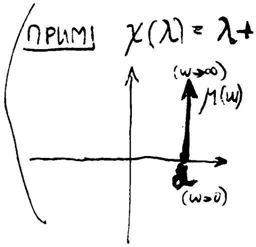
$\Rightarrow (\mathrm{Re}\,\lambda < 0) \Leftrightarrow (\mathrm{Re}\,\frac{1}{\lambda} < 0)$ $\square$

## ~~N28~~ Критерий Михайлова

пусть $\chi(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ — хар. многочлен

$\boxed{\text{ОПР}}$ определим годограф Михайлова — это $M(\omega) \equiv \chi(i\omega) \in \mathbb{C}$, $\omega \in [0, +\infty)$

ПРИМ! $\chi(\lambda) = \lambda + \alpha$, $\alpha > 0$




$M(\omega) = \chi(i\omega) = i\omega + \lambda$

утв, что $\chi(\lambda)$ устойчив $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{1) годограф } M(\omega) \text{ движется } \circlearrowleft \\ \text{2) годограф проходит последовательно } n \text{ квадрантов плоскости } \mathbb{C} \end{cases}$

док-во: 1) при $n=1$ см. пример

пусть $n > 1$.

принцип аргумента: пусть $\chi(i\omega)$ - годограф $\chi(\lambda)$ и коэфф-ты $\in \mathbb{R}$

тогда $\arg \chi(i\omega)\Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = (m_- - m_+)\cdot\pi$, где $m_-$ - число корней слева, $m_+$ - число корней справа

$\arg \chi \stackrel{def}{=} \varphi$ : $\chi = \rho e^{i\varphi}$

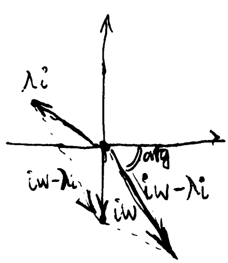
док-во:

$\chi(i\omega) = a_n \underbrace{(i\omega - \lambda_1)}_{M_1} \ldots \underbrace{(i\omega - \lambda_n)}_{M_n} = \rho e^{i\varphi} = M_1 \ldots M_n$

$\arg \chi(i\omega) = \arg M_1 + \ldots + \arg M_n$

$\Rightarrow \arg \chi(i\omega)\Big|_{-\infty}^{+\infty} \equiv \Delta\arg \chi(i\omega) = \Delta\arg M_1 + \ldots + \Delta\arg M_n$

Рассмотрим $\Delta\arg \underset{(i\omega - \lambda_i)}{M_i}$, пусть $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$.

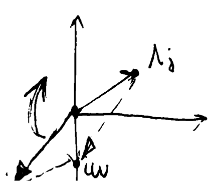



при $\omega \to -\infty$ $\arg(i\omega - \lambda_i) = -\frac{\pi}{2}$

при $\omega \to +\infty$ $\arg(i\omega - \lambda_i) = \frac{\pi}{2}$

пусть $\lambda_j$ : $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$

тогда $\Delta\arg M_j \xrightarrow[\omega\to-\infty]{} \frac{3\pi}{2}$



$\Delta \arg M_j \xrightarrow[\omega\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$ / $\Rightarrow \arg (i\omega - \lambda_j)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} = -\pi$.

□

[III] Критерий Михайлова — следствие принципа аргумента.

если $\chi(\lambda)$ имеет коэфф-ты из $\mathbb{R}$, то $\arg \chi(i\omega)\Big|_{\omega=0}^{\omega=+\infty} = (m_- - m_+)\frac{\pi}{2}$

док-во: корни $\chi(\lambda)$ расп. симметр. относит. оси $Re$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \arg M_i\Big|_{\omega=-\infty}^{+\infty} = 2\arg M_i\Big|_{\omega=0}^{+\infty}$. □

~~следствие 2~~

замечание: $\chi(\lambda)$ устойчив $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} n = m_- \\ m_+ = 0 \end{cases}$

# Критерий Стодолы

**УТВ 1** Пусть $a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = 0$, $a_2 > 0$, тогда утв. об устойчивости этого (1) ур-я равносильно тому, что $\left(\begin{matrix} a_1 > 0 \text{ и } a_0 > 0 \\ a_2 > 0 \end{matrix}\right)$

док-во: по дискриминанту.

**УТВ 2** Пусть ур-е $a_n x^{(n)} + \ldots + a_0 x = 0$, $a_n > 0$ (2)

тогда ур-е (2) устойчиво $\Rightarrow$ $\begin{cases} a_n > 0 \\ \vdots \\ a_0 > 0 \end{cases}$ (в одну сторону)

док-во: $\chi(\lambda) = \lambda^n a_n + \lambda^{n-1} a_{n-1} + \ldots + a_0 = a_n(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta)\ldots$ произв многоч степени не выше 2

$\chi(\lambda)$ – устойчив $\Rightarrow \begin{cases} \lambda - \lambda_1 - \text{уст.} \\ \vdots \\ \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta - \text{уст.} \\ \vdots \end{cases}$ $\underset{(\text{утв}1)}{\Leftrightarrow}$ все коэфф-ты положительны: $\begin{cases} -\lambda_1 > 0 \\ \vdots \\ \alpha > 0 \\ \beta > 0 \\ \vdots \end{cases}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ раскрываем скобки $\Rightarrow a_n > 0 \ldots a_0 > 0$.

□

# Критерий Рауса – Гурвица

Пусть $\chi(\lambda) = a_0\lambda^n + \ldots + a_n$, $a_0 > 0$

**УТВ** многочлен устойчив $\Leftrightarrow$ все главные миноры квадр. матрицы Рауса $R$ строго положительны.

где $R = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & & \vdots \\ 0 & a_1 & & \ddots & a_1 \\ 0 & a_0 & & & \\ \vdots & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & a_n \end{bmatrix}$

миноры:

$$\begin{cases} \Delta_1 = a_1 > 0 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \\ \vdots \end{cases}$$

матрица $n \times n$

Док-во: без док-ва.

**ПРИМ 1** $\chi_1(\lambda) = a_0\lambda + a_1$, $a_0 > 0$

Крит. Рауса-Гурвица: $R = [a_1]$

$\Delta_1 = |a_1| = a_1 > 0 \Leftrightarrow \chi_1(\lambda)$ - устойчив

проверка: $\chi_1(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{a_1}{a_0} < 0$ уст $\Leftrightarrow a_1 > 0$

**ПРИМ 2** $\chi_2(\lambda) = a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2$, $a_0 > 0$

$R = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta_1 = a_1 > 0$

$\Delta_2 = a_1 a_2 > 0$

$\Rightarrow \chi_2(\lambda)$ - устойч. $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 > 0 \\ a_2 > 0 \end{cases}$

**ПРИМ 3** $R = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}$ $\quad \chi_3(\lambda) = a_0\lambda^3 + \ldots + a_3$

... ну ты понял

$$\begin{cases} a_1 > 0 \\ \boxed{a_1 a_2 - a_3 a_0 > 0} \\ a_3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a_1 a_2 > a_0 a_3}$$

$\boxed{\text{теор}}$ 1 $\quad a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_0 x(t) = u(t) \qquad (1)$

утв, что (1) – устойчиво $\Leftrightarrow$ $\chi(\lambda) = a_n \lambda^n + \ldots + a_0$ – устойчив
(все его корни в левой полуплоскости).

Док-во:

$\Rightarrow$ пусть не так: $\chi(\lambda)$ – неустойч. $\Rightarrow$ $\exists \lambda$: $\chi(\lambda) = 0$ ?
$\mathrm{Re}\,\lambda \geq 0$ $(\mathrm{Re}\,\lambda = 0)$

выделим любое частное решение $x_1(t)$ для ур-я (1)

$\Rightarrow a_n x_1^{(n)} + \ldots + a_0 x_1 = u$

возьмём ф-ию $x(t) = x_1(t) + e^{\lambda t}$, тогда $x(t)$ – решение (1)
(проверяется подстановкой)

и оно неустойчиво.

$\Leftarrow$ пусть все корни слева, $\chi(\lambda)$ – устойч., $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$

рассм. общее решение (1): $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$

[заметим: пусть $\left.\begin{matrix} x_2(t) \\ x_1(t) \end{matrix}\right\}$ частные решения, тогда $x_1(t) - x_2(t)$ – решение однородного ур-я $a_n x^{(n)} + \ldots + a_0 x = 0$. (док-ть подстановкой) $(1^0)$

$\boxed{\text{УТВ}}$ $\chi(\lambda)$ – устойч. $\Rightarrow$ любое ~~однор~~ решение $(1^0)$

$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}$ – устойчиво.

$\boxed{\text{УТВ}}$ докажем, что некоторое частное решение ур-я (1) устойчиво
$\Rightarrow$ все частные решения устойчивы. $(\to 0)$

выберем такое частное решение: $x(t) = \int_0^t w(\tau) u(t-\tau)\, d\tau$

и покажем, что оно устойчиво, т.е. $x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$.

$$|x(t)| \leq \int_0^t |w(\tau)| \cdot |\underbrace{u(t-\tau)}_{\leq C}|\, d\tau \leq C \int_0^t |w(\tau)|\, d\tau$$

$w(t) = \frac{d}{dt} h(t)$

$h$ – перех. хар-ка: $a_n h^{(n)} + \ldots + a_0 h = 1$

$\Rightarrow h(t) = x_0(t) + \frac{1}{a_0}$, $x_0$ – некоторое реш. однор. ур-я

$$x_0(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n e^{\lambda_n t}$$

$$w(t) = \frac{d}{dt} x_0(t) = c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_n \lambda_n e^{\lambda_n t}$$

$$|w(t)| \leq |c_1||\lambda_1| \left| e^{(Re\lambda_1 + Im\lambda_1)t} \right|$$

$\left| e^{Re\lambda_1 t} \right|$, ибо $|e^{i\varphi}| = 1$

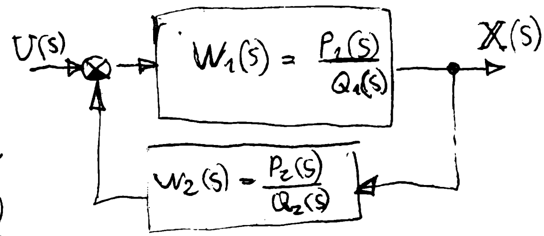
$$\leq c c_1 |\lambda_1| \frac{1}{|Re\lambda_1|} + \ldots \qquad \left[ \int_0^\infty e^{Re\lambda_1 t} dt = \frac{1}{|Re\lambda_1|} \right]$$

$$\ldots + c c_n \frac{|\lambda_n|}{|Re\lambda_n|} < \infty$$ — ур-е устойчиво. □

только для замкнутых систем:

самая страшная теорема

$\boxed{\text{Теор}}$ Найквиста.




$\boxed{\text{Условие}}$

$W_1(S)$, $W_2(S)$ } физич. реализуемы

(т.е. $\deg P_1(S) < \deg Q_1(S)$)

(и $\deg P_2(S) < \deg Q_2(S)$)

$\boxed{\text{Следствие}}$ $\deg(Q_1 Q_2 + P_1 P_2) \leq \deg(\overbrace{Q_1 Q_2}^{Q}) \equiv n = \deg Q$

передат. ф-ия замкн. системы:

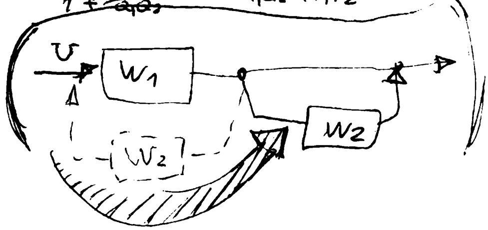
(самост. аналогично с предыд. схемами)

тоже $\deg Q_3 = n$

$$W(S) = \frac{X(S)}{U(S)} = \frac{W_1(S)}{1 + W_1(S) \cdot W_2(S)} = \frac{P_1 / Q_1}{1 + \frac{P_1 P_2}{Q_1 Q_2}} = \frac{P_1 Q_2}{Q_1 Q_2 + P_1 P_2} \equiv Q_{замкн}(S)$$

—‖— разомкн. системы:

$$W_1(S) \cdot W_2(S) = \frac{P_1(S) P_2(S)}{Q_1(S) Q_2(S)}$$




Применим принцип аргумента

$$\arg Q(S) \Big|_{0}^{\infty}{}_{s=i\omega} \equiv \Delta \arg Q(i\omega) = (m_- - m_+) \frac{\pi}{2}$$

пусть $\begin{cases} m_+ = l \\ m_- = n - l \end{cases}$

$= (n-2l)\frac{\pi}{2}$.  $Q(S)$ - характ. многочлен для $W_{разомкн.}(S)$

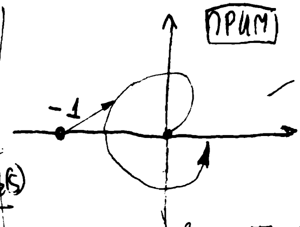
$\boxed{\text{УТВ}}$ (принцип арг. для замкн.) замкн. устойчива $\Leftrightarrow$ $Q_з(S)$ - уст.

$$\Delta \arg Q_{замкн}(i\omega) = n\frac{\pi}{2} \quad (\text{т.е. } l = 0)$$

## Теорема Найквиста

замкнутая система с перед. ф-цией $W(S)$ устойчива $\Leftrightarrow$ годограф Найквиста $\nu(\omega) = W_1(i\omega)\cdot W_2(i\omega)$, $\omega \in [0; +\infty)$ охватывает точку $-1$ на компл. плоскости ровно $\frac{l}{2}$ раз.

$\boxed{\text{ПРИМ}}$




не охватывает ($l = 0$)

$\Rightarrow$ если $l=0$, то для уст. замкн. сист. достаточно, чтобы $\nu(\omega)$ не охватывал $-1$.

Док-во

пусть $M(S) = 1 + W_1(S)\cdot W_2(S) = \frac{Q_1(S)Q_2(S) + P_1(S)P_2(S)}{Q_1(S)Q_2(S)}$

$$\Delta\arg M(i\omega) = \underbrace{\Delta\arg(Q_1Q_2) + \Delta\arg(P_1P_2)}_{\Delta\arg Q_з} - \underbrace{\Delta\arg(Q_1Q_2)}_{\Delta\arg Q = (n-2l)\frac{\pi}{2}}$$

заметим, что замкн. сист. устойчива

$$\arg M(i\omega) = n\frac{\pi}{2} - (n-2l)\frac{\pi}{2} = 2l\frac{\pi}{2} = \frac{l}{2}\cdot 2\pi \quad (\text{ровно } \tfrac{l}{2} \text{ вокруг } 0)$$

$\Rightarrow$ годограф $\nu(\omega)$ делает ровно $\frac{l}{2}$ оборотов вокруг $-1$.

# Интервальные многочлены.
## Устойчивость.

ОПР

$$\chi(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n$$

пусть $a_i \in [\underline{a_i}, \overline{a_i}]$, т.е. $a_i$ – неопр., $\overline{a_i}, \underline{a_i}$ – заданы

$I_\chi = \{ \chi(\lambda) \mid a_i \in [\underline{a_i}, \overline{a_i}] \}$ – <u>интервальный</u> многочлен

ОПР $I_\chi$ устойчив $\Leftrightarrow$ <u>все</u> $\chi(\lambda)$ устойчивы

ТЕОР (В.Л. Харитонов, 1978г)

$I_\chi$ – устойчив $\Leftrightarrow$ устойчивы 4 многочлена $\chi_1(\lambda) \ldots \chi_4(\lambda)$

| | $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | ...... | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\chi_1(\lambda)$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | ...... | |
| $\chi_2(\lambda)$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | ...... | |
| $\chi_3(\lambda)$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | ...... | |
| $\chi_4(\lambda)$ | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | ...... | |

если „1", то $\overline{a}_k$ – в $k$-й строке

если „0", то $\underline{a}_k$ — " —

<u>без док-ва</u>

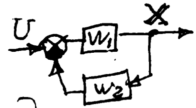
# Количественные показатели устойчивости

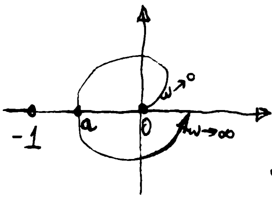
(1) Запас устойчивости по Найквисту

$\nu(\omega)$, $\omega \in [0; +\infty)$ – годограф

$\nu(\omega) \in \mathbb{C}$

$\nu(\omega) \equiv W_1(i\omega) \cdot W_2(i\omega)$



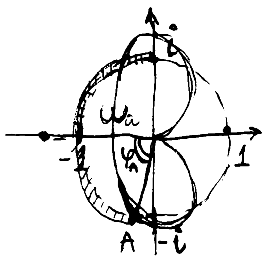




[охватывает == помещаем годограф в −1; смотрим, вращается ли на 360° его конец]

по амплитуде $\begin{cases} a < 1 \text{ – устойч} \\ a = 1 \text{ – граница устойч} \\ a > 1 \text{ – неуст.} \end{cases}$

$$K_a \equiv 20 \lg \frac{1}{a} \geq 3$$

запас устойч. по фазе




система устойчива, если $\varphi \geq 30^\circ$ $(60^\circ)$

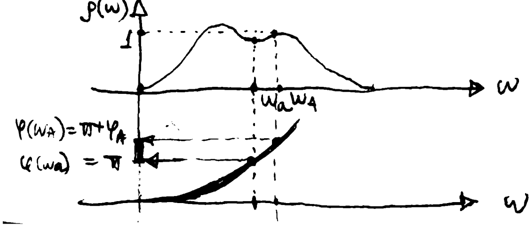
## Диаграммы Бодэ (для вычисл. $K_a, \varphi_A$)

АЧХ, ФЧХ } $\nu(\omega)$

$\nu(\omega) = \rho e^{i\varphi(\omega)}$

АЧХ: $\rho(\omega)$

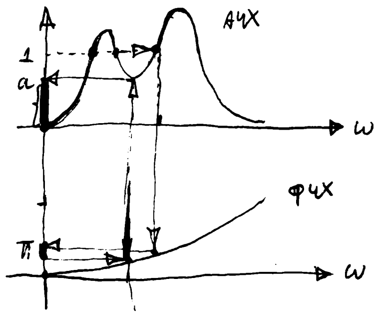
ФЧХ: $\varphi(\omega)$




$\varphi(\omega_a) = \pi$

$\varphi_A \equiv \varphi(\omega_A) - \underset{\pi}{\varphi(\omega_a)}$

## Определение запаса уст. по диагр. Боде




## Выбор диапазона частот для постр $V(\omega)$

$$V(\omega) = W_1(i\omega)\,W_2(i\omega) = \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)}$$ , где $P, Q$ – многочлены

пусть $s \in \mathbb{C}$,
$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \begin{cases} \dfrac{1}{Q_0} \cdot \dfrac{P(s)}{(1 + T_1 s + T_2 s^2 + \dots)} \\ \dfrac{P_0\,(1 + T_1' s + T_2' s^2 + \dots)}{Q(s)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_1 \equiv \frac{1}{T_1}, \quad W_1' \equiv \frac{1}{T_1'}$$

выбираем $w \in [w_1; w_1']$

## Запись лин. дифф. ур-я в форме сист. 1ого порядка

ПРИМ $\quad x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = 0$, где $x = x(t)$ $\quad \Leftrightarrow$

$$x^{(k)} = \frac{d^k}{dt^k}x(t)$$

одно и то же мн-во решений
$\Leftrightarrow$ $\quad \dot{v} = Av$, где $v = v(t) \in \mathbb{R}^n$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$v(t) \equiv \left(x(t), x^{(1)}(t), \dots, x^{(n-1)}(t)\right)$$

$$\Rightarrow v^{(1)}(t) = \left(x^{(1)}(t), \dots, x^{(n-2)}(t)\right) = Av \quad (\text{проверить})$$

рассм. ур-е:

$$x^{(n)} - a_{n-1}x^{(n-1)} - \dots - a_0 x = b_{n-1}u^{(n-1)} + \dots + b_0 u \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix}}_{v(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & 0 & a_1 \\ & & & \vdots \\ 0 & & 1 & a_{n-1} \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_n(t) \end{pmatrix}}_{v(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}}_{b}\underbrace{u(t)}_{u(t)} \qquad A \in \mathbb{R}^{n\times n} \qquad \dot v = Av + Bu \qquad (2)$$

теор

решением ур-я (1) назовём $x(t)$, $u(t)$: удовлетворяют (1) при некоторых условиях $x(0), x'(0), \dots, x^{(n-1)}(0)$.

решением ур-я (2) назовём $v(t)$, $u(t)$: удовлетворяют (2) при некоторых нач. усл. $v(0) \in \mathbb{R}^n$

тогда всякое решение (1) явл. решением (2), и наоборот. при некоторой зависимости $v(x)$; её нужно найти.

Док-во ($\Leftarrow$) пусть (2); $n = 3$ (для $n=4$ так же)

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} u \qquad \begin{matrix} (I) \\ (II) \\ (III) \end{matrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = v_3 \qquad x = Cv \qquad (IV)$$

(IV) $\Rightarrow x = v_3$

(III) $\Rightarrow v_3^{(1)} = v_2 + a_2 v_3 + b_2 u$

(II) $\Rightarrow v_2^{(1)} = v_1 + a_1 v_3 + b_1 u$

(I) $\Rightarrow v_1^{(1)} = a_0 v_3 + b_0 u$

$$\Rightarrow v_3^{(2)} = v_2^{(1)} + a_2 v_3^{(1)} + b_2 u^{(1)}$$

$$\Rightarrow v_3^{(2)} = \underbrace{v_1 + a_1 v_3 + b_1 u}_{v_2^{(1)}} + a_2 v_3^{(1)} + b_2 u^{(1)}$$

$$v_3^{(3)} = v_1^{(1)} + a_1 v_3^{(1)} + b_1 u^{(1)} + a_2 v_3^{(2)} + b_2 u^{(2)}$$

$$\Rightarrow\ v_3^{(3)} = \underbrace{(a_0 v_3 + b_0 u)}_{v_1^{(1)}} + a_1 v_3^{(1)} + b_1 u^{(1)} + a_2 v_3^{(2)} + b_2 u^{(2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ v_3^{(3)} - a_2 v_3^{(2)} - a_1 v_3^{(1)} - a_0 v_3^{(0)} = b_2 u^{(2)} + b_1 u^{(1)} + b_0 u^{(0)}$$

$\Rightarrow$ $[v_3 = x]$ и получаем (1).

---

$\Leftarrow$ пусть (1)

$(\mathrm{IV}_a)$ : $v_3 \equiv x$

$(\mathrm{III}_a)$ : $v_2 \equiv v_3^{(1)} - a_2 v_3 - b_2 u$

$(\mathrm{II}_a)$ : $v_1 = v_2^{(1)} - a_1 v_3 - b_1 u$

$$\Rightarrow\ v_1^{(1)} = v_2^{(2)} - a_1 v_3^{(1)} - b_1 u^{(1)}$$

заметим, что $v_2^{(2)} \underset{(\mathrm{III}_a)}{=} v_3^{(3)} - a_2 v_3^{(2)} - b_2 u^{(2)}$

$$\Rightarrow\ v_1^{(1)} = v_3^{(3)} - a_2 v_3^{(2)} - b_2 u^{(2)} - a_1 v_3^{(1)} - b_1 u^{(1)}$$

$\Rightarrow$ ~~$v_1^{(1)} = a_0 v_3 + b_0 u$~~

$$v_1^{(1)} = v_3^{(3)} - a_2 v_3^{(2)} - b_2 u^{(2)} - a_1 v_3^{(1)} - b_1 u^{(1)}$$

$$v_1^{(1)} = x^{(3)} - a_2 x^{(2)} - b_2 u^{(2)} - a_1 x^{(1)} - b_1 u^{(1)} \overset{\text{в силу}}{\underset{(1)}{=}} a_0 x + b_0 u$$

$$x^{(3)} = a_2 x^{(2)} + a_1 x^{(1)} + a_0 x + b_2 u^{(2)} + b_1 u^{(1)} + b_0 u \longrightarrow (1),\ n=3$$

$$\Rightarrow\ v_1^{(1)} = a_0 v_3 + b_0 u \qquad (\mathrm{I}_a)$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_a \\ \mathrm{II}_a \\ \mathrm{III}_a \end{pmatrix} \Leftrightarrow (2),\ n=3$$

$\square$

---

$\boxed{\text{Замечание}}$ пусть $Sx(t) = \frac{d}{dt} x(t)$

$$S^k x(t) = \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

в док-ве теор. можно заменить все производные на степени символа $S$

$\boxed{\text{следствие}}$ определим $SX[k] = X[k+1]$ (символ сдвига)

тогда имеет место равносильность разностных систем:

$$X[k+n] - a_{n-1}X[k+n-1] - \ldots - a_0 X[k] = b_{n-1}u[k+n-1] + \ldots + b_0 u[k] \quad (1')$$

$$V[k+1] = AV[k] + bu[k] \quad (2')$$

и $(1') \Leftrightarrow (2')$

## Совпадение характ. многочленов (1) и (2)

(1): $\chi(\lambda) \equiv \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \ldots - a_0$

(2): $\chi_2(\lambda) = \det(\lambda E - A)$

- решение одноp. системы $\dot{V} = AV$ $(2_0)$

$V(t) = ce^{\lambda t}$, $c \in \mathbb{R}^n$

$c\lambda \cancel{e^{\lambda t}} = Ac\cancel{e^{\lambda t}}$

$(\lambda E - A)c = 0$

$\Rightarrow \underbrace{\det(\lambda E - A)}_{\chi_2(\lambda)} = 0$

Замечание: $\det(\lambda E - A) = \det(\lambda E - A^T)$, $\forall \lambda$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & 0 & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Утв}}$ $\chi(\lambda) = \chi_2(\lambda)$

Док-во: $\chi_2(\lambda) = \det(\lambda E - A^T) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & & & \vdots \\ 0 & & & \lambda & -1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & -a_{n-2} & \lambda - a_{n-1} \end{pmatrix}$

обозначим:

$d_i \equiv -a_i$, $D_n \equiv \det(\ldots)$

$\chi(\lambda) = \lambda^n + d_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + d_0$

разложим по 1 столбцу:

$$\begin{cases} D_n = \lambda D_{n-1} + (-1)^{n-1} d_0 \underbrace{(-1)^{n-1}}_{\text{минор}} = \lambda D_{n-1} + d_0 \\ D_{n-1} = \lambda D_{n-2} + d_1 \\ \vdots \\ D_1 = \lambda + d_{n-1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_2 = \lambda D_1 + d_{n-2} = \lambda(\lambda + d_{n-1}) = \lambda^2 + d_{n-1}\lambda + d_{n-2} \\ \vdots \\ D_n = \lambda^n + \lambda^{n-1} d_{n-1} + \ldots + d_0 = \chi(\lambda) \end{cases}$$

$\square$

---

## „Неустойчивость" свойства устойчивости

**ОПР** матрица A назыв. устойчивой (Гурвицевой), если хар. многочлен $\chi(\lambda) \equiv \det(\lambda E - A)$ – устойчив, т.е. все корни в левой полуплоскости. ($\chi(\lambda) = 0 \Rightarrow Re(\lambda) < 0$)

**Замечание** преобразование $A \to A' = T^{-1}AT$ не изменяет $\chi(\lambda)$

т.е. $\det(\lambda E - A) = \det(\lambda E - A')$

~~д-ть~~ подстановкой

**ПРИМ**

$$A' = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 100 & & 0 \\ & -1 & 100 & \\ & 0 & \ddots & 100 \\ \varepsilon & & & -1 \end{bmatrix}}_{n} \Big\} n$$

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda E - A') = \det \begin{bmatrix} \lambda+1 & -100 & \cdots & 0 \\ & \lambda+1 & -100 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -100 \\ -\varepsilon & \cdots & & \lambda+1 \end{bmatrix} = (\text{разлож по 1 столбцу}) =$$

считаем $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

$$= (\lambda+1)(\lambda+1)^{n-1} - (-1)^{n-1}\varepsilon(-100)^{n-1} = (\lambda+1)^n - (100)^{n-1}\cdot\varepsilon$$

корни $\chi(\lambda)$: $(\lambda+1)^n = \varepsilon\cdot 100^{n-1}$

$$\Rightarrow \lambda = -1 + \sqrt[n]{\varepsilon\cdot 100^{n-1}}$$

если $\varepsilon = 0$, то $\mathrm{Re}\,\lambda = -1$. матрица устойчива.

если $\varepsilon > \frac{1}{100^{n-1}}$, то $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$, матрица неустойчива

при $n=9$ условие неустойчивости: $\varepsilon > \frac{1}{100^8} = 1\cdot 10^{-16}$ – а это как погрешность в double

**Вывод:** устойчивость $A'$ неуст. по отн. к элементам матрицы

Нужен критерий: если $A$ – уст., то как определить количественный запас устойчивости

...

## Известные результаты (подходы к проблеме)

1) Теор. Харитонова
2) Запас уст по Найквисту
3) По норме решения матричного ур-я А.М. Ляпунова.

## Запас уст. по способу 3

как бы ищем самое неуст. решение

$$\boxed{\varkappa(A) = 2\|A\|_2 \cdot \sup_{y_0 = y(0)} \frac{\int_0^{+\infty} y^T(\tau)y(\tau)\,d\tau}{y_0^T y_0}}$$

$y(t \geq 0) \in \mathbb{R}^n$

$y^T y = y_1^2 + \ldots + y_n^2 = \|y\|^2$ – евкл. норма

$$\dot{y} = Ay \quad (3)$$

Чем больше $\varkappa(A)$, тем менее уст. система (3).

Если система (3) неуст., то $\varkappa(A) = +\infty$

$\varkappa(A) \geq 0$ - очевидно

$\varkappa(A) \geq 1$ - потом докажем

$\|A\|_2$ - спектральная норма $A$:

$$\|A\|_2 = \sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$, где $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ - Евкл. норма

<u>Свойства</u>:

1) $\|A\|_2^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} (x^T A^T A x) = \lambda_{max}(A^T A)$

2) если $A^T = A$, $A > 0$ $(\lambda(A) > 0)$, то $\|A\|_2 = \lambda_{max}(A)$

## <u>Уравнение Ляпунова</u>

(ур. 1) $A^T H + HA = -E$, где $H$ - решение (искомое)

МТВ

Пусть $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\dot{y} = Ay$

определим ф-цию $V(t) \equiv y(t)^T H \cdot y(t)$, (квадр. форма)

тогда $\frac{dV(t)}{dt}$ вдоль решения $y(t) = y(t)^T (A^T H + HA) \cdot y(t)$

<u>Док-во</u>:

$$\dot{V}(t) \overset{df}{=} \dot{y}^T(t) H y(t) + y(t)^T H \dot{y}(t) \overset{\dot{y}=Ay}{=} y^T(t)(A^T H + HA) y(t)$$

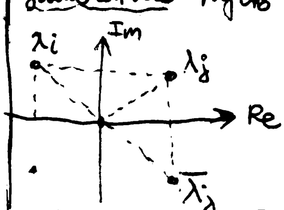
$\square$

## <u>Свойства решений ур-я Ляпунова</u>

пусть $H$ - решение ур-я Ляпунова и $\lambda_i(A) + \overline{\lambda_j(A)} \neq 0$ $\forall i, j$

где $\lambda_i$ - собств. числа матрицы $A$.

<u>замечание</u> пусть $\lambda_i(A) + \lambda_j(A) = 0$, тогда




$\Rightarrow \lambda_i$ и $\lambda_j$ симм. относит. оси Im.

тогда 1) решение H — единственно (без док-ва)

2) решение H — симметрично ($H^T = H$)

3) если A-устойчива, то $H > 0$ (строго положит. определена)

4) если $H > 0$, то A-устойчиво.

Док-во: 1) —

2) следует из 1) (трансп. ур-е Ляпунова; исп. единственность)

3) A-устойчива, $\forall y(t): \dot{y}(t) = Ay(t) \quad y(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

и пусть $A^TH + HA = -E$, тогда $\frac{d}{dt} y^T(t) H y(t) \underset{\text{утв.}}{=}$

$= y^T(t)(A^TH + HA)y(t) \underset{\text{ур.1.}}{=} -y(t)^T y(t)$

проинтегрируем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} y^T(t) H y(t)\, dt = -\int_0^{+\infty} y(t)^T y(t)\, dt$$

$$y^T(t) H y(t) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = (\text{—}\|\text{—})$$

$$\boxed{+y^T(0) H y(0) = +\underbrace{\int_0^{+\infty} y(t)^T y(t)\, dt}_{>0}} \quad \forall y(0) \quad (*)$$

$H > 0$

4) пусть $H > 0$

покажем, что A-устойчива, т.е. $\forall y(t): \dot{y} = Ay \quad y(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$

$V(t) \equiv y(t)^T H y(t)$

$H > 0 \Leftrightarrow \forall y \quad y^T H y \geq y^T y \lambda_{min} > 0$

$\lambda_{min} \equiv \lambda_{min}(H)$

$y^T y \lambda_{max} \geq y^T H y$

$\lambda_{max} \equiv \lambda_{max}(H)$

**УТВ** Свойства $\varkappa(A)$

1) $\varkappa(A) \geq 1$
2) $\varkappa(-E) = 1$
3) $\varkappa(\rho A) = \varkappa(A), \forall \rho \in \mathbb{R}^+$

**Док-во:** 1) $A^T H + HA = -E \Rightarrow \underbrace{\|A^T H + HA\|_2}_{< \, 2\underbrace{\|A\|_2 \|H\|_2}_{\varkappa(A)}} = \|E\|_2 = 1$

$\Rightarrow \varkappa(A) \geq 1$

2) $\varkappa(-E) = 2\|-E\|_2 \|H_1\|_2$, где $H_1$:

$-H_1 - H_1 = -E$

$H_1 = \frac{1}{2}E \Rightarrow \|H_1\|_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \varkappa(-E) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.$

3) $\varkappa(\rho A) \stackrel{df}{=} 2\|\rho A\|_2 \cdot \|H_\rho\|$, где $H_\rho$: $\rho A^T H_\rho + H_\rho \rho A = -E$

$\Rightarrow H_\rho = \frac{1}{\rho} H$, где $H$: $A^T H + HA = -E$

$\Rightarrow \varkappa(\rho A) = 2\rho\|A\|_2 \cdot \frac{1}{\rho}\|H\| = \varkappa(A).$ $\square$

---

**команды SCIlab'a для расчета колич. показат. устойчивости**

1) `H = lyap(A, -E, 'c')` 'c' = continuous
2) `spec(H)` $\rightarrow$ собств. числа $\rightarrow$ проверка положит. опред-ти (если $\forall i \ \lambda_i(H) > 0 \Rightarrow$)
3) $\varkappa(A) = 2 \cdot \mathrm{norm}(A, 2) \cdot \mathrm{norm}(H, 2)$

если $\exists i : \lambda_i(H) \leq 0$, то $\varkappa(A) = \infty$

Е.П.

ОСН

1) Попов, 1989 db.tt/WRM5iXFT

2) Ким Д.П., том I, 200?
db.tt/fPuGaons

ДОП

3) Попов, 1988 db.tt/b99mSAM

4) Ким Д.П., том II, 2004
/2WD8YjKi

$$y^T\lambda_{max}\, y \geqslant y^T H y \geqslant y^T \lambda_{min}\, y > 0$$

Кроме того (утв 1)

$$\frac{d}{dt}V(t) = y^T(t)\,(A^T H + HA)\,y(t) \underset{\text{ур }\Lambda}{=} -y(t)^T y(t)$$

$$\Downarrow$$

$$-\lambda_{max}\frac{dV(t)}{dt} = y^T(t)\,\lambda_{max}\,y(t) \geqslant V(t) > 0$$

$$\Rightarrow -\lambda_{max}\frac{\frac{dV(t)}{dt}}{V(t)} \geqslant 1 \Rightarrow \frac{\frac{dV(t)}{dt}}{V(t)} \leqslant -\frac{1}{\lambda_{max}}$$

интегрируем

$$\frac{d}{dt}\ln V(t) \leqslant -\frac{1}{\lambda_{max}} \Rightarrow \ln V(t) - \ln V(0) \leqslant \frac{-t}{\lambda_{max}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{V(t)}{V(0)} \leqslant e^{-t\lambda_{max}} \Rightarrow 0 < V(t) \leqslant V_0\, e^{-t\lambda_{max}}$$

$$\Rightarrow V(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow y(t)^T H y(t) \longrightarrow 0 \Rightarrow \underset{y(0)\text{-произв.}}{\forall y(t)} \quad y(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\Rightarrow A$ - устойчива. $\square$

---

$\boxed{\text{Следствие}}$ 1 пусть $H>0$ - решение ур. $\Lambda$, тогда $A$ - **уст.**, и также $\text{æ}(A) = 2\|A\|_2 \cdot \|H\|_2$

$\boxed{\text{Док-во}}$

$$\sup_{y(0)} \frac{\int_0^\infty y^T(t)\,y(t)\,dt}{y^T(0)\,y(0)} \overset{(*)}{=} \sup_{y(0)} \frac{y(0)^T H\, y(0)}{y(0)^T y(0)} = \|H\|_2$$

$\boxed{\text{Следствие}}$ 2 $\quad \|H\|_2 = \lambda_{max}(H)$

$H^T = H$

$H > 0$

# Дискретные системы

## Классификация

① $\begin{cases} \dot{y} = Ay + Bu \\ y(t),\ u(t) \end{cases}$

если $t \in \mathbb{R}$; $u, y \in \mathbb{R}^n$, то это <u>непрерывная</u> система

② $t \in \mathbb{N}$, $t = 1, 2, 3, \ldots$, но $u, y \in \mathbb{R}^n$

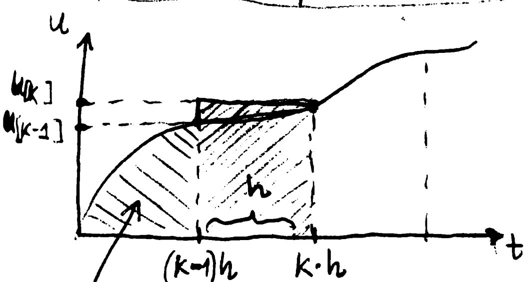
$t = 0, h, 2h, 3h, \ldots$

это <u>дискретная</u> система

③ $t \in \mathbb{N}$, $u, y \in \mathbb{N}^n$ это <u>цифровая</u> система

---

## Звено интегрирования для дискр. системы




$x(t) = \int_0^t u(\tau)\,d\tau$

(I) формула Эйлера

$x[k] - x[k-1] = u[k] \cdot h$

(II) формула Трапеции

$$x[k] - x[k-1] = \frac{u[k] + u[k-1]}{2} h$$

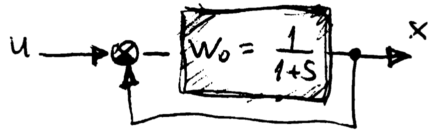
## Построим звено дифференцирование

$x \leftarrow u$

(I) $u[k] - u[k-1] = x[k] \cdot h$ $\Rightarrow$ (I) $x[k] = \dfrac{u[k] - u[k-1]}{h}$

(II) $u[k] - u[k-1] = \dfrac{x[k] + x[k-1]}{2} \cdot h$ (II) $x[k] + x[k-1] = \dfrac{2}{h} \left(u[k] - u[k-1]\right)$

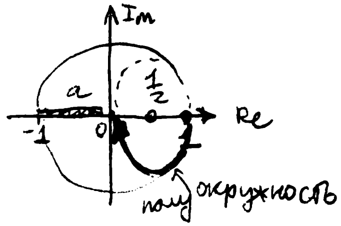
ПРИМ




$$W = \frac{X}{U} = \frac{W_0}{1+W_0} = \frac{\frac{1}{1+s}}{1+\frac{1}{1+s}} = \frac{\frac{1}{1+s}}{\frac{s+2}{1+s}} = \frac{1}{s+2}$$

годограф Найквиста:

$$\gamma(w) = W_0(iw), \quad w \in [0, +\infty)$$




при $w \to \infty$

$$\gamma(w) = \frac{1}{1+iw} \to \frac{1}{iw} \to 0-0$$

$$\frac{1}{iw} = \frac{-i}{w}$$

при $w \to 0$

$$\gamma(w) = 1$$

Запас уст. по Найквисту:

$a = 1$

$\varphi = \pi$

Запас уст. по реш. ур-я Ляпунова

$$W = \frac{1}{s+2} \Leftrightarrow \dot{x} + 2x = u$$

однор. система $\dot{x} = -2x$

$$\Rightarrow A = -2 = \boxed{-2}_{1}^{1}$$

$$A^T H + HA = -I$$

$$-2 \cdot H + H(-2) = -1$$

$$H = \frac{1}{4} \qquad \lambda(H) = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \text{сист. устойчива}$$

$$æ(A) = æ(-2) = 2\|A\|_2 \|H\|_2 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

годограф Найквиста в Scilab

```
s = poly(0, "s");
b = 1;
a = 1 + s;
sl = syslin('c', b, a); ~ лин система b/a
nyquist(sl);
```

## Оценка точности формул дифф (I'), (II')

1) $x[k] = \frac{1}{h}\left(u[k]-u[k-1]\right)$

$$X(s) = \underbrace{\frac{1}{h}(1-e^{-hs})}\,U(s)$$

точное дифф-е: $X(s) = \underbrace{s}\cdot U(s)$ , $W(s) = s$ $\qquad O_3 = O(\|x\|^3)$

$$W_I(s) = \frac{1}{h}(1-e^{-hs}) = \frac{1}{h}\left(1-\left(1-hs+\frac{(hs)^2}{2}-\dots+O_3\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{h}\left(hs-\frac{(hs)^2}{2}+O_3\right) = s + h\frac{s^2}{2}+\frac{O_3}{h} \sim \boxed{s+O_2}$$ первый порядок точности

2) $\left(x[k]+x[k-1]\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{h}\left(u[k]-u[k-1]\right)$

$$X(s)(1+e^{-sh})\frac{1}{2} = \frac{1}{h}(1-e^{-sh})U(s)$$

$$\Rightarrow W_{II}(s) = \frac{2}{h}\frac{(1-e^{-sh})}{(1+e^{-sh})} =$$

$$\left(\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\dots \text{ при } \|x\| \ll 1\right)$$

$$= \frac{2}{h}\cdot\frac{\left(1-\left(1-sh+\frac{s^2h^2}{2}-\frac{s^3h^3}{6}+O_4\right)\right)}{\left(1+\left(1-sh+\frac{s^2h^2}{2}-\frac{s^3h^3}{6}+O_4\right)\right)} =$$

$\frac{2}{A}\cdot\frac{A}{2-A}$

$\frac{1}{h}\cdot\frac{-A/2}{1+A/2}$

$$= \frac{2}{h}\cdot\frac{sh-\frac{s^2h^2}{2}+\frac{s^3h^3}{6}+O_4}{2-sh+\frac{s^2h^2}{2}-\frac{s^3h^3}{6}+O_4} =$$

$$= s\,\frac{\left(1-\frac{sh}{2}+\frac{s^2h^2}{6}+O_3\right)}{\left(1\underbrace{-\frac{sh}{2}+\frac{s^2h^2}{4}-O_3}_{\text{обозн } x}\right)} \approx s\frac{(\dots)}{1+x} = (1-x+x^2+O_3)\,s(\dots) =$$

$$= \left(1 + \underbrace{\left(\frac{sh}{2} - \frac{(sh)^2}{4} + O_3\right)}_{x} + \underbrace{\left(\frac{s^2h^2}{4} + \frac{1}{16}s^4h^4 + \overbrace{O_6 + O_3 + O_4 + O_5}^{O_3}\right)}_{x^2} + O_3\right) S(\ldots) =$$

$$= S\left(1 - \frac{sh}{2} + \frac{(sh)^3}{6} + O_3\right) \cdot \left(1 + \frac{sh}{2} - \cancel{\frac{(sh)^2}{4}} + O_3 + \cancel{\frac{(sh)^2}{4}} + \frac{1}{16}(sh)^4\right) =$$

$$= S\left(1 - \frac{(sh)^2}{4} + O_3\right) \Rightarrow$$ ф-ла ($\mathrm{II}'$) имеет 2й порядок точности.

## Устойчивость дискретных систем.

$\boxed{\text{прим}}$ $\dot{y} = Ay$ $\quad e^{-sh} \equiv z^{-1}$ – оператор сдвига „назад"

$$z^{-1} y[k] = y[k-1]$$

ф-ла 2ого порядка точности: $\dot{y} \leftrightarrow \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right) y[k] \cdot \frac{h}{1-z^{-1}} = h\left(\frac{1+z^{-1}}{2(1-z^{-1})}\right) y[k]$

$$\frac{h}{2}\frac{(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})} y[k] = Ay[k]$$

$$\frac{h}{2}(1+z^{-1}) y[k] = (1-z^{-1}) A y[k]$$

$$\frac{h}{2}\left(y[k] + y[k-1]\right) = A\left(y[k] - y[k-1]\right)$$

$$\left(-A + \frac{h}{2}\right) y[k] = \left(-\frac{h}{2} - A\right) y[k-1]$$

$$\left(\frac{h}{2}E - A\right) y[k] = \ldots$$

$$y[k] = \left(A - \frac{h}{2}E\right)^{-1}\left(A + \frac{h}{2}E\right) y[k-1]$$

## Дискретные системы:

$$y[k] = A_d\, y[k-1] + B_d\, u[k-1] \tag{1}$$

или

$$\alpha_n x[k+n] + \alpha_{n-1} x[k+n-1] + \ldots + \alpha_0 x[k] = \beta_n u[k+n] + \ldots + \beta_0 u[k] \tag{2}$$

Что же с их устойчивостью?

$$x^{(n)} - a_{n-1}x^{(n-1)} - \ldots - a_0 x = b_{n-1}u^{(n-1)} + \ldots + b_0 u$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \dot{v} = Av + Bu \\ x = Cv \end{cases}, \text{ где } A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \ldots & 0 & a_0 \\ 1 & & & a_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \end{array}\right) \quad B = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} \quad C = (0 \ldots \ldots 0\ 1)$$

$$\frac{d}{dt} \doteq s$$

$$(s^n - a_{n-1}s^{n-1} - \ldots - a_0)\, x(t) = (b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_0)\, u(t)$$

если $s \xrightarrow[\text{считать}]{} s(x[k]) = x[k+1]$, то
$(s = z^{+1})$

$d_n = 1, \quad d_{n-1} = -a_{n-1}, \ldots, \quad d_0 = -a_0, \quad m = n-1$
?

$\boxed{\text{УТВ}}$ системы (1) и (2) равносильны.

Точная дискретизация:

$$\dot{y} = Ay$$

$y(0)$ - известно

$$y(t) = y(0) + \dot{y}(0)\cdot t + \frac{\ddot{y}(0)}{2}t^2 + \frac{\dddot{y}(0)}{6}t^3 + \ldots$$

пусть $t = h$

$$\Rightarrow \ddot{y} = A^2 y, \quad \dddot{y} = A^3 y, \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(h) = \left(y(0) + h A\cdot y(0) + \frac{(hA)^2}{2}y(0) + \frac{(hA)^3}{6}y(0) + \ldots\right) =$$

$$= y(0)\cdot\left(I + hA + \frac{1}{2}(hA)^2 + \frac{1}{6}(hA)^3 + \ldots\right) = [\text{обозн}] =$$

$$= y(0)\cdot e^{hA} \quad (\text{матричная экспонента})$$

$\Rightarrow y[k] = e^{hA} \cdot y[k-1]$

## Свойства $e^{Ah}$

1) $\frac{d}{dt} e^{At} = A \cdot e^{At}$ док-во по опр.

2) $S(\theta) = \int_0^\theta e^{-A\tau} d\tau = A^{-1}(E - e^{-A\theta})$

Док-во: $S(\theta) \overset{df}{=} \int_0^\theta \left(E - A\tau + \frac{A^2\tau^2}{2} - \ldots\right) d\tau =$

$= E\theta - \frac{A\theta^2}{2} + \frac{A^2\theta^3}{6} - \ldots = A^{-1}(E - e^{-A\theta})$. $\square$

Следствие 3) $\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-A\tau} d\tau}_{S(+\infty)} = A^{-1}$

$S(+\infty) \underset{(2 \text{ св-во})}{=} A^{-1}$, если $A$ - гурвицева (устойчива)

(т.е. $\det(\lambda E - A)$ - устойчив) $\Rightarrow \mathrm{Re}\,\lambda < 0$

## Частное решение неоднородной системы

$\dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t)$

возьмём лапласа от обеих частей:

$sY(s) = AY(s) + BU(s)$

$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{(sE - A)^{-1} \cdot B}_{} \cdot U(s)$

да это же передаточная функция! $W(s)$

$W(s) \doteqdot w(t) \Leftrightarrow (sE - A)^{-1}B \overset{df}{=} \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} w(\tau) d\tau$

матрица

св-во3

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-s(E-A)\tau} d\tau B = \int_0^{+\infty} e^{-s\tau} w(\tau) d\tau$$

$$\Rightarrow w(\tau) = e^{A\tau} B$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t w(t-\tau) B u(\tau) d\tau = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

## Дискретизация неоднор. системы

предположим, что $u(t)$ кусочно-постоянно интерполируется

$$y(h) = \underbrace{e^{Ah}}_{=A_d} \cdot y(0) + \underbrace{\int_0^h e^{A(h-\tau)} B u(0) d\tau}_{\underbrace{\int_0^h e^{A(h-\tau)} d\tau B}_{B_d} \cdot u(0)}$$

$B_d$ — не зависит от номера узла

$$\Rightarrow y[k+1] = A_d \cdot y[k] + B_d \cdot u[k]$$

$$\int_0^h e^{A(h-\tau)} d\tau = \int_h^0 e^{At} (-dt) = \int_0^h e^{At} dt$$

$t = h - \tau$

$dt = -d\tau$

$$B_d = \int_0^h e^{At} dt \cdot B$$

## Решение разностных ур-й с пост. коэф-тами

(3) $y[k+n] + \alpha_{n-1} y[k+n-1] + \ldots + \alpha_0 y[k] = u[k]$

(3₀) 1) $y[k+n] + \ldots + \alpha_0 y[k] = 0$

$y[k]=z^k,\ z\in\mathbb{C}$

$z^{k+n}+\ldots+\alpha_0 z^k=0 \Leftrightarrow z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\ldots+\alpha_0=0$ обозн. $\chi_\alpha(z)=0$
характ. ур-е

$z_1,\ldots,z_n$ – корни

→ общее решение $(3_0)$: $y[k]=c_1z_1^k+\ldots+c_nz_n^k$, $c_1\ldots c_n\in\mathbb{C}$

Если $\alpha_i\in\mathbb{R}$, то если $z_i=a_i+ib_i$, то $\exists\, z_j=\bar{z}_i=a_i-ib_i$

и $c_i\in\mathbb{C}$, $c_j=\bar{c}_i$

Если кратный корень: $\underbrace{z_1\ldots z_k}_{k}, z_{k+1},\ldots,z_n$, тогда

вместо $c_1z_1^k$ пишем $(c_{10}+c_{11}k+\ldots+c_{1,k-1}k^{k-1})z_1^k$

2) неоднор. ур-е 3 имеет общее решение:

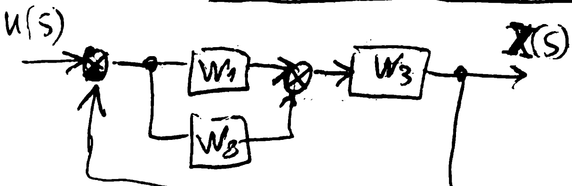
$y[k]=c_1z_1^k+\ldots+c_nz_n^k+\tilde{y}[k]$, где $\tilde{y}[k]$ – любое частное решение (3)

Утв. Решение ур. (3) устойчиво $\Leftrightarrow |z_i|<1\ \forall i\in 1,\ldots,n$

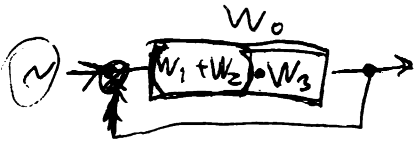
(ибо $y[k]=z^k$)

(все корни в единичном круге)

## Построение ур-й больших систем




(ищем $W(s)\overset{df}{=}\dfrac{X(s)}{U(s)}$) ~




$$W = \frac{W_0}{1 + W_0}, \text{ где } W_0 = (W_1 + W_2) W_3$$

$$W(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad s \overset{df}{=} \frac{d}{dt}$$

$$\Rightarrow Q(s)\,X(s) = P(s)\,U(s)$$

(4) $$Q\left(\frac{d}{dt}\right)x(t) = P\left(\frac{d}{dt}\right)u(t)$$

В 5ци задании эту систему нужно дискретизовать, найти запас устойчивости (Дискретизация ур-я Ляпунова)

система (4) имеет вид $x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = b_{m-1}u^{(m-1)} + \dots + b_0 u$

$$\Leftrightarrow \dot{v} = Av + Bu, \text{ где } A = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & 0 & \\ 0 & \ddots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

для этой сист. пишем ур-е Ляпунова (для однородной

## Количественный показатель устойчивости дискр. (разностн.) системы через норму дискр. реш. ур-я Ляпунова

пусть $y[k+1] = A_d\, y[k]$, $k \geq 1$

дискр. ур-е Ляпунова: $A_d^T H A_d - H = -E$

H - решение его

Утв ① пусть собств. числа: $\lambda_i(A_d)\cdot\lambda_j(A_d)\neq 1$, $\forall i,j=1,\dots,n$

тогда имеет место 1) решение $H$ - единственно. (без док-ва)

2) если $H$ - решение, то $H=H^T$ (следует из 1)

3) если $A_d$ - устойчива (все решения $y[k]$ ур-я (1) $\underset{k\to+\infty}{\to} 0$), то

$H>0$ (строго положит. опр.).

т.е. $\lambda_i(H)>0$, $\forall i=1,\dots,n$ (все собств. числа $>0$)

$$H=\sum_{l=0}^{\infty} A_d^l (A_d^l)^T = \underbrace{E}_{l=0} + \underbrace{A_d A_d^T}_{l=1} + \underbrace{A_d^2 (A_d^2)^T}_{l=2} + \dots$$

Док-во:

$A_d^T H A_d - H = -E$ (проверить) (это будет решением ур-я

пусть $A_d$ - устойч. $\Rightarrow |\lambda_i(A_d)|<1 \Rightarrow \sum_{l=0}^{+\infty} A_d^l (A_d^l)^T$ - сходится

$$\Rightarrow \underset{+\infty}{H} = \underbrace{E}_{>0} + \underbrace{A_d A_d^T}_{\geq 0} + \underbrace{A_d^2 (A_d^2)^T}_{\geq 0} > 0$$

вот поэтому

$\square$

---

Утв ② (обратное) пусть $H$ - решение ур-я $\Rightarrow A_d$ - устойчива и $H>0$

Док-во: $A_d^T H A_d - H = -E$

$H>0$: $0<\lambda_1(H)\leq\dots\leq\lambda_n(H)$

$\Leftrightarrow \forall y \quad 0 < y^T H y \leq \lambda_n(H)\cdot y^T H y$ (*)

определим $V_k = y[k]^T H y[k] > 0$, $\forall k$

Заметим, что устойчивость $A_d$ равносильна:

$$\forall k \quad V_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

(*) $$V_{k+1} - V_k = y[k]^T \left( A_d^T H A_d - H \right) y[k] =$$

$$= y[k]^T E\, y[k] < 0$$

$\Rightarrow V_k$ убывает; докажем, что она сходится к $0$.

$$V_k \le \lambda_n(H) \cdot y[k]^T y[k] \quad (\text{из } \#) = -\lambda_n(H)\,(V_{k+1} - V_k)$$

$$V_k \le -\lambda_n(H)(V_{k+1} - V_k)$$

$$\frac{1}{\lambda_n(H)} V_k \le -(V_{k+1} - V_k)$$

$$V_{k+1} \le \underbrace{\left(1 - \frac{1}{\lambda_n}\right)}_{\substack{\alpha < 1 \\ \lambda_n > 0}} V_k \; ; \quad \text{с др. стороны, т.к. } V_{k+1} > 0,$$

~~то~~ $\alpha > 0$.

Получили геом. прогрессию с $q \in [0; 1] \Rightarrow$ сходится к $0$

$\square$

---

<u>Определим количеств. ~~показатель~~ устойчивости</u>

$\boxed{\text{Опр}}$ показатель $\varkappa_d(A_d) \equiv \| H \|_2$

<u>Физич. смысл $\varkappa_d$</u>:

$\boxed{\text{Утв. 3}}$ пусть $\exists\, H > 0: \; A_d^T H A_d - H = -E$, тогда

$$\sum_{k=0}^{+\infty} y[k]^T y[k] = y[0]^T H\, y[0]$$

Док-во: $\|H\|_2 \overset{df}{=} \sup\limits_{x} \frac{x^T H x}{x^T x}$

$V_k \equiv y[k]^T H y[k]$

$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} V_{k+1} - V_k = V_\infty - V_0$

$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} y[k]^T (A_d^T H A_d - H) y[k] \underset{\text{ур. ляп.}}{=} -\sum\limits_{k=0}^{+\infty} y[k]^T y[k]$

т.к. $V_\infty = 0$, то $\sum y[k]^T y[k] = V_0 - V_\infty = V_0 = y[0]^T H y[0]$
(ибо $A_d$ - уст.
$y[k] \to 0$) $\square$

---

Следствие:

$$\varkappa_d(A_d) = \sup_{y[0]} \frac{y[0]^T H y[0]}{y[0]^T y[0]} = \sup_{y[0]^T y[0] = 1} y[0]^T H y[0]$$

В SCI-Labe

вычисление $\varkappa_d$:

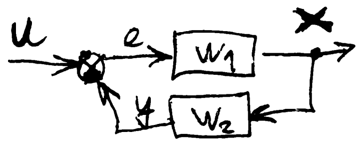
1) H = lyap(A, -I, 'd')

2) spec(H)

3) если $\forall i \ \lambda_i(H) > 0$, то $\varkappa_d$ = norm(H, 2)

else $\varkappa_d = +\infty$

# Понятие о модальном управлении

(1) 


$w_1$: $x[k] = a_1 x[k-1] + \ldots + a_p x[k-p] + e[k]$

$\chi(z^{-1}) = 1 - a_1 z^{-1} - \ldots - a_p z^{-p}$ — определяет устойч. системы

сдвиг назад

$z_i$ : $\chi(z_i^{-1}) = 0$ при $e = 0$

$(e[k] = 0 \quad k \geq 1)$

$x[k] = C z_i^k$ — такие решения называются модами

Система устойч. $\Leftrightarrow |z_i| < 1$

<u>Задача модального упр:</u>

для $w_1$ подобрать $W_2$ : замкн. система с перед.

ф-цей $W = \frac{w_1}{1 + w_1 w_2}$ имела наперёд заданные моды.

<u>Решение</u>: пусть $W_2$ :

(2) $y[k] = K_1 x[k-1] + \ldots + K_p x[k-p]$ ($u \equiv 0$ однородн. движение)

$= (a_1 - K_1) x[k-1] + \ldots + (a_p - K_p) x[k-p]$

$\Rightarrow \chi'(z^{-1}) = 1 - (a_1 - K_1) z^{-1} - \ldots - (a_p + K_p) z^{-p}$

подбираем $K_i$, можем получить любой $\chi$

Пусть даны моды $z_1^1 \dots z_p^1$, тогда

$$\chi(z^{-1}) = (z^{-1} - z_1^{-1}) \cdot \ldots \cdot (z^{-1} - z_p^{-1}) =$$

$$= 1 - a_1^1 z^{-1} - \ldots - a_p^1 z^{-p}$$

$$a_i^1 = a_i - K_i$$

$$\Rightarrow K_i = a_i - a_i^1. \quad \text{решено.}$$

---

Задача 2 | Заданы корни

$$W_1: \begin{cases} v[k+1] = Av[k] + Be[k] \\ x[k] = Cv[k] + De[k] \end{cases}$$

где $A, B, C, D$ - матрицы, $v[k] \in \mathbb{R}^p$

$W_2$: $y[k] = K_0 x[k]$, $K_0$ - число

$$v[k+1] = Av[k] + \underbrace{Bu[k]}_{\text{положим } 0} - BK_0 x[k] = (A - BK_0C)v[k]$$

$$\chi^1(z) = \det(zE - A + BK_0C)$$

Задача 2: подобрать $K_0$: $A - BK_0C$ имела наперед заданные собств. числа. Это не всегда возможно. (но можно хотя бы устойчивые подобрать).

---

## Вопросы алгебры лин. систем

### I Форма Фробениуса

(3)

Пусть дана система $y[k] - \alpha_1 y[k-1] - \ldots - \alpha_p y[k-p] = \beta_1 u[k-1] + \ldots + \beta_p u[\ldots$;

$k \geq p+1$

она равносильна системе:

(4) $\begin{cases} v[k] = A_\varphi v[k-1] + B_\varphi u[k-1] \\ y[k] = C_\varphi v[k] \end{cases}$

$$A_\varphi = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \ldots & 0 & \alpha_q \\ \hline 1 & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & \alpha_1 \end{array}\right) \quad B_\varphi = \begin{pmatrix} \beta_q \\ \vdots \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad C_\varphi = (0 \ldots 0\, 1)$$

__Док-во__: см. док-во для непр. системы (непр. времени) с заменой $z$ на $\frac{d}{dt}$

$\boxed{\text{опр}}$ состояние $v \in \mathbb{R}^q$ в системе (4) называется __управляемым__ если $\exists$ управление $u = \begin{pmatrix} u[1] \\ \vdots \\ u[q] \end{pmatrix}$, переводящее систему (4) из точки $v[0] = v$ в нулевое состояние $v[q] = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{опр}}$ __система__ (4) называется __управляемой__, если любое её __состояние управляемо__ ($\forall v \in \mathbb{R}^q$ $v$ — управляемо)

$\boxed{\text{УТВ}}$ пусть $\det A \neq 0$.

Система (4) управляема $\Leftrightarrow \operatorname{rank}[\overbrace{A^{q-1}B, A^{q-2}B, \ldots, B}^{S_1}] = q$

__Док-во__ $v[k] = Av[k-1] + Bu[k] \Rightarrow$

$\Rightarrow v[q] = A^q v[0] + \underline{A^{q-1}Bu[1] + \ldots + Bu[q]} \equiv$

$\equiv A^q v[0] + S_1 \times \begin{pmatrix} u[1] \\ \vdots \\ u[q] \end{pmatrix}$

сист.(4) упр. $\Rightarrow$ $\forall v[0]\ \exists u = \begin{pmatrix} u[1] \\ \vdots \\ u[q] \end{pmatrix} : A^q v[0] + S_1 u = 0$

$v[0] = -A^{-q} S_1 u$ (т.к. $\det A \neq 0$, то)

это разрешимо $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} S_1 = q$

$\square$

**ОПР** состояние $v \in \mathbb{R}^q$ системы (4) <u>наблюдаемо</u>, если его можно вычислить из наблюдений $\begin{pmatrix} y[1] \\ \vdots \\ y[q] \end{pmatrix}$ при $v[0] = v$

**ОПР** <u>система</u> (4) <u>наблюдаема</u>, если все её состояния наблюдаемы ($\forall v \in \mathbb{R}^q$, $v$ - наблюдаемо)

**УТВ** система (4) <u>наблюдаема</u> $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} \overbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{q-1} \end{bmatrix}}^{H_0} = q$

**Док-во** пусть $u = 0$ (при $u \neq 0$ аналогично)

$y[k] = Cv[k-1] = CAv[k-2] = \ldots = CA^{q-1} v[0]$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y[1] \\ \vdots \\ y[q] \end{pmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{q-1} \end{bmatrix}}_{H_0} \underbrace{v[0]}_{v}$$

уравнение $y = H_0 v$ разрешимо относит. $v$. $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank} H_0 = q$

$\square$

**ОПР** (Равносильные системы)

пусть даны системы: $W: \begin{cases} v[k] = Av[k-1] + Bu[k] \\ y[k] = Cv[k-1] + Du[k] \end{cases}$

$W': \begin{cases} v'[k] = A'v'[k-1] + B'u[k] \\ y'[k] = C'v'[k-1] + D'u[k] \end{cases}$

Системы $W$ и $W'$ <u>равносильны</u> $\Leftrightarrow$ $\forall u = \begin{pmatrix} u[1] \\ \vdots \\ u[N] \end{pmatrix}$ $\forall v[0]$

всегда $\exists\, v'[0]$ : $y' = y$ $\begin{cases} y'[1] = y[1] \\ \vdots \\ y'[N] = y[N] \end{cases}$

---

$\boxed{\text{ПРИМ}}$ $W$: $\begin{cases} v[k] = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} v[k-1] + \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta \end{pmatrix} u[k] \\ y[k] = (0 \ \ \varphi)\, v[k-1] + \delta u[k] \end{cases}$

$W'$: $\begin{cases} v'[k] = \alpha v'[k-1] + \beta u[k] \\ y'[k] = \varphi v'[k-1] + \delta u[k] \end{cases}$ вход

выход

$\dim v = 2$
$\dim v' = 1$

очевидно $y' = y$. <u>они равносильны</u>

$\boxed{\text{ОПР}}$ Среди всех систем, равносильных данной $W$, система $W'$ с наим. размерн. простр-ва состояний называется <u>минимальной</u>.

$\boxed{\text{Замечание}}$ <u>Мин. система</u> не единственна.

$\boxed{\text{ПРИМ}}$ $W''$: $v''[k] = \alpha v''[k-1] + \xi \beta u[k]$

$y''[k] = \frac{\varphi}{\xi} v''[k-1] + \delta u[k]$ тоже равнос. $W'$

$\boxed{\text{УТВ}}$ системы вида (4) с матрицами $(A, B, C, D)$ и

$(A', B', C', D')$ : $\begin{pmatrix} D' = D \\ A' = TAT^{-1} \\ B' = TB \\ C' = CT^{-1} \end{pmatrix}$ (преобр. подобия) <u>равносильны</u>.

$TAT^{-1} =$
$= \xi \alpha \xi^{-1} = \alpha$

$\boxed{\text{Теор}}$ О декомпозиции (Р. Калман, 1961г)

① Система (4) с матрицами $(A,B,C,D)$ преобр. подобия всегда может быть приведена к виду

$$A' = \left(\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} \\ \hline 0 & 0 & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{array}\right), \quad B' = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C' = (0\ C_2 \,|\, 0\ C_4), \quad D' = D$$

без док-ва

② подсистема $A_c = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, $B_c = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}$, $C_c = (0\ C_2)$

без док-ва

управляема

③ подсистема $A_0 = \begin{pmatrix} A_{22} & A_{24} \\ 0 & A_{44} \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} B_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C_0 = (C_2\ C_4)$

это $O$, не нуль

без док-ва

наблюдаема

④ система с матр. $(A, B, C, D)$ и подсистема $(A_0, B_0, C_0, D)$ равносильны.

без док-ва

---

sci-lab:

$A, B, C$

sl = syslin('c', A, B, C [, D]);

'c' — непрер.

'd' — разност.

slc = contrss(sl); выдаст $A_c, B_c$ и $C_c$

slo = obsvss(sl); даст $A_0, B_0, C_0$

obsvss(A, B, C [, tol])

tol — погрешность задания матриц

Новая лекция 19

(1d) Рассм. $y[k+q] - \alpha_{q-1} y[k+q-1] - \ldots - \alpha_0 y[k] = \beta_{q-1} u[k+q-1] + \ldots + \beta_0 u[k]$

пусть $S$: $Sy[k] = y[k+1]$, тогда

(1) $$\underbrace{(S^q - \alpha_{q-1} S^{q-1} - \ldots - \alpha_0)}_{\chi_\alpha(S)} y[k] = (\beta_{q-1} S^{q-1} + \ldots + \beta_0)\, u[k]$$

(1c) или $S\, y(t) = \frac{d}{dt} y(t)$

Ранее указано:

(1) $\Rightarrow \begin{cases} Sv[k] = A_\Phi v[k] + B_\Phi u[k] \\ y[k] = C_\Phi v[k] \end{cases}$, где $A_\Phi, B_\Phi, C_\Phi$ имеют вид Фробениуса

**Теор**

(2) Пусть система $\begin{cases} Sv[k] = Av[k] + Bu[k] \\ y[k] = Cv[k] \end{cases}$ наблюдаема,

тогда $\exists$ преобр. подобия, выраж матрицей $T$: $A' = TAT^{-1}$, $B' = TB$, $C' = CT^{-1}$ имеют след. вид: $A' = A_\Phi$, $B' = B_\Phi$, $C' = C_\Phi$ (форма Фробениуса)

Док-во:

$A_\Phi = TAT^{-1}$, $B_\Phi = TB$, $C_\Phi = CT^{-1}$ ХОТЕТЬ найти $T$ $\quad T = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_q \end{bmatrix}$

$t_i$ – строки

1) $\Rightarrow (0 \ldots 0\ 1) = CT^{-1} \Rightarrow \underbrace{(0 \ldots 0\ 1)T}_{t_q} = C \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{t_q = C}$

2) $A_\Phi = TAT^{-1} \Rightarrow A_\Phi T = TA \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & \ldots & 0 & \alpha_{q-1} \\ 1 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & 1 & \alpha_0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_q \end{bmatrix} A \Rightarrow$

$\Rightarrow\ t_{q-1} + d_0 t_q = t_q A \quad \Rightarrow \boxed{t_{q-1} = t_q A - d_0 t_q}$

$t_{q-2} + d_1 t_q = t_{q-1} A \quad \Rightarrow \boxed{t_{q-2} = t_{q-1} A - d_1 t_q}$

$\dots \qquad\qquad \dots$

$\boxed{t_1 = t_2 A - d_{q-2} t_q}$

подставим $C$

подставим $t_{q-1}$ в $t_{q-2}$ и т.д.

$d_{q-1} t_q = t_1 A \qquad \boxed{d_{q-1} t_q = t_1 A}$

---

$t_{q-2} = (CA - C d_0 E)$

$\vdots$

$t_1 = CA^{q-1} - d_1 CA^{q-2} - \dots - d_{q-2} C$

~~$CA - d_1 C$~~

$(CA - d_0 C)A - d_1 C$

$CA^2 - d_0 CA - d_1 C$

$\Rightarrow \boxed{t_1 A = CA^q - d_1 CA^{q-1} - \dots - d_{q-2} CA = d_{q-1} C}$

Оказывается, если $d_i$ - коэфф-ты хар. многочлена матрицы $A$, т.е. $\det(\lambda E - A) = \chi(\lambda) = \lambda^q - d_{q-1}\lambda^{q-1} + \dots - d_0$, то последнее ур-е выполняется, поскольку $\chi(A) = 0$ (теор. Гамильтона-Кэли) и $\det \neq 0$

$\chi(A) = A^q - d_{q-1} A^{q-1} - \dots - d_0 \underbrace{E}_{A^0} = 0$. $\Rightarrow$ вся система совместна.

получили, откуда брать коэфф-ты. (решаем спектральную задачу, составляем хар. многочлен $(\lambda-\lambda_1)\dots(\lambda-\lambda_q)$ и раскрываем скобки)

$\chi(\lambda) = 0 \longrightarrow \lambda_1 \dots \lambda_q \longrightarrow A \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_q \end{pmatrix}$

~~почему система наблюдаема?~~

где используется наблюдаемость?

$$T = \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_q \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -d_0 & -d_1 & \dots & -d_{q-2} \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \ddots & & -d_1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -d_0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\det = 1} \times \begin{bmatrix} CA^{q-1} \\ CA^{q-2} \\ \vdots \\ CA \\ C \end{bmatrix}$$

$A_\varphi = TAT^{-1}$, $T$ – не особенная ($\det \neq 0$) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} CA^{q-1} \\ CA^{q-2} \\ \vdots \\ CA \\ C \end{pmatrix} \neq 0 \overset{\text{по нашей лекции}}{\Leftrightarrow} A, B, C \text{ – наблюдаемая система.}$$

$\square$

---

# Нелинейные системы

$\dot{x} = f(x,u)$ - автономная сист (не зависит от $t$)

$\dot{x} = Ax + Bu$

$\boxed{\text{ОПР}}$ однородное движение: ($u(t) \equiv 0$).

кайбэ $\dot{x} = \tilde{f}(x) = f(x,0)$

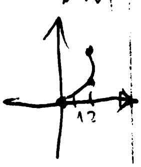
(1) объект: $\dot{x} = f(x)$ (

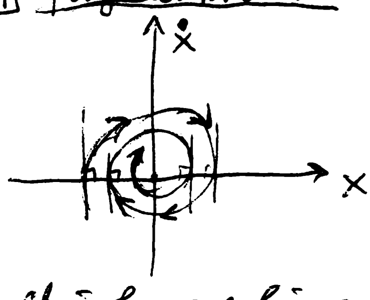
это вектор $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = x \in \mathbb{R}^n$, $f \in \mathbb{R}^n$

$\boxed{\text{ОПР}}$ фазовая плоскость: система координат:

$x = t^2$

$\dot{x} = 2t$






параметр: $t$

фазовая траектория: $(x(t), \dot{x}(t))$

уравнения $\dot{x} = f(x)$

## Свойства фазовой траектории

1) при $\dot{x} > 0$ все траектории идут слева направо при $t\uparrow$ и наоборот. (ибо $x$ должен расти)

2) пересекает ось $X$ под углом $90^\circ$

**ОПР** Точка равновесия: $f(x) = 0$, т.е. $\dot{x} = 0$.

**УТВ** пусть $x = a$ – точка равн.: $f(a) = 0$, тогда заменой

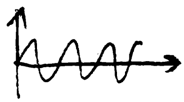
$x' = x - a$, ~~$f'(x') = f(x+a)$ получаем систему $\dot{x}' = f'(x')$ с нулевой точкой равновесия.~~

$$\boxed{\dot{x}' = \overset{f(x'+a)}{\overset{\parallel}{f(x')}}}$$ ну ты понел

**ОПР** Система устойчива в окрестности точки равновесия ($x = 0$) ($\dot{x} = f(x)$) по Ляпунову, если выполнено:

$$\boxed{\forall(\varepsilon > 0)\ \exists(\delta > 0) : (\|x(0)\| < \delta) \to (\|x(t)\| < \varepsilon),\ \forall t > 0}.$$

в частности: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ – все решения устойчивы по Ляпунову, но не по входу



**ОПР** Система $\dot{x} = f(x)$ асимптотически устойчива по Ляпунову, если

$$\boxed{\exists(\varepsilon > 0) : (\|x(0)\| < \varepsilon) \to \left(x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0\right)}$$

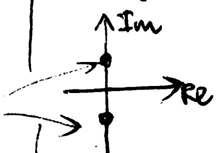
**ОПР** Система $\dot{x} = Ax$ — линейное приближение системы $\dot{x} = f(x)$, если ряд Тэйлора для $f(x) = \underset{0}{\underset{\parallel}{f(0)}} + \underbrace{Ax} + O(\|x\|^2)$ (2)

## $\boxed{\text{Теор}}$ Ляпунова – Пуанкаре

1) если матрица $A$ - гурвицева (⇔ система (2) устойчива по входу), то
$$\begin{cases} \text{система (2) устойчива.} \\ \text{система (2) асимптотич. устойчива} \\ \text{система (1) асимптотич. устойчива} \end{cases}$$

2) если матрица $A$ – не гурвицева, т.е $\chi(\lambda)$ - неуст, т.е. $\exists \lambda_i : \chi(\lambda_i)=0$ и $\boxed{Re\,\lambda_i > 0}$, тогда (2) - неуст., (1) - неуст. (во всех смыслах)

3) пусть все корни $\lambda_i : Re\,\lambda_i \leq 0$ и $\exists \lambda_j : Re\,\lambda_j = 0$



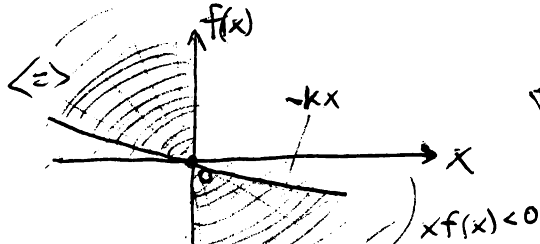

тогда система (2) неуст. асимпт.
система (2) - уст по Ляпунову
о системе (1) ничего сказать нельзя.

$\boxed{\text{без док-ва}}$

## Функции Ляпунова

иая ф-ия Ляпунова – достаточное условие устойчивости ф-ии в точке равновесия.

$\boxed{\text{ПРИМ}}$ $\dot{x} = f(x)$, $f(0) = 0$, $\exists K > 0 : \begin{cases} |f(x)| > K \cdot |x| \\ x f(x) < 0 \end{cases}$ ⇔




тогда система (1) асимпт.-уст. по Ляпу

док-во: пусть $V(x) \equiv \frac{x^2}{2}$ : $\begin{cases} 1) V(0)=0 \\ 2) V(x) \geq 0 \end{cases}$ и $3) V(x \neq 0) > 0$

4) $\dot{V}(x) \equiv \frac{d}{dt} V(x(t)) =$

$= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} \underset{\dot{x}=f(x)}{=} \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x)$

$\frac{\partial V}{\partial x}$ – производная вдоль одной из траекторий $x(t)$

---

$\frac{\partial V}{\partial x} = x$ , $x f(x) < 0$ при $x \neq 0$ по условию $\Rightarrow \dot{V}(x) < 0$ при $x \neq 0$

$x f(x) \leq -k x^2 = -2kV$

$\Downarrow$

$\underset{x \neq 0}{0 < V(t) < V_0(t)}$ , $\dot{V}_0(t) = -2kV_0(t)$

$V_0(t) = e^{-2kt} \cdot V_0(0) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow V(t) \to 0 \Rightarrow x(t) \to 0$.

$\square$

---

**Теор** (Ляпунова) Достаточное условие устойчивости:

$\dot{x} = f(x)$, $f(0)=0$ и пусть $\exists V(x) \in \mathbb{R}$: , $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$

1) $\dot{V}(x) \leq 0$, где

$\dot{V}(x) \equiv \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n$

2) $V(x \neq 0) > 0$

3) $V(0) = 0$

4) $V(x)$, $\dot{V}(x)$ – непрерывны , тогда

---

1) если $\dot{V}(x \neq 0)$ [в некоторой окрестн. нуля] $< 0$, то система (1) асимптотич. устойчива

2) если $\forall$ окрестности нуля есть точки: $\dot V()=0$

то система не асимптотич. устойчива, но устойчива по Ляпунову (по опр.)

---

## Классификация движений $\dot x = f(x)$ вблизи точки равновесия.

(I) $f$ - непрер., линеаризация

$f \to$ Тэйлор

$f(x) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(0)}} + A\cdot X + O(\|x\|^2)$. - линейное приближение

$$\dot x \approx Ax, \quad A = \left\| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right\|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$f \in \mathbb{R}^n = \begin{Bmatrix} f_1(x_1 \ldots x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1 \ldots x_n) \end{Bmatrix}$$

(II) построение хар-го многоч.

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda E - A) = (\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_n) \xrightarrow[\lambda_i \in \mathbb{C}]{A \in \mathbb{R}^{n \times n}} (\lambda - \underset{\alpha_1 \in \mathbb{R}}{\alpha_1})\underbrace{(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \bar\lambda_2)}_{\lambda_2 = \bar\lambda_3} \ldots$$

2 случая

$$= (\lambda - \alpha_1)\underbrace{(\lambda^2 + a_1\lambda + a_2)}_{a_1, a_2 \in \mathbb{R}} \ldots$$

произведение многочленов с коэфф. из $\mathbb{R}$ степени $\leq 2$

(т.е. ф-ии $x(t)$)

$\Rightarrow$ все движения вблизи нуля ($\|x\| \ll 1$) описываются

(III) суммой элементарных движений $x_1(t) + \ldots + x_6(t) + \ldots$

$x_1(t) = Ce^{\alpha_1 t}$ соотв $\lambda - \alpha_1 = 0$

$x_2(t)+x_3(t)=A\cos(\omega t+\varphi)e^{-\gamma t}$ соответствует $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$

⋮ все остальные повторяют тот же вид (то всего 2 вида многочленов)

$\Rightarrow$ все движения качественно описываются, как движения системы порядка $\le 2$. Их нужно описать, их всего 6.

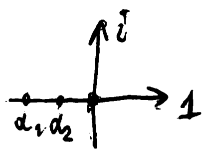
$$\chi(\lambda)=\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$$

$$\left(\lambda+\frac{a_1}{2}\right)^2-\frac{a_1^2}{4}+a_2=0$$

$$\lambda_{1,2}=-\frac{a_1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2-a_2}=\begin{cases}\alpha\pm i\beta, & \left(\frac{a_1}{2}\right)^2-a_2<0\\ \alpha_{1,2}, & \left(\frac{a_1}{2}\right)^2-a_2\ge 0\end{cases}$$

1) $\alpha_{1,2}\in\mathbb{R}$, $\alpha_{1,2}<0$

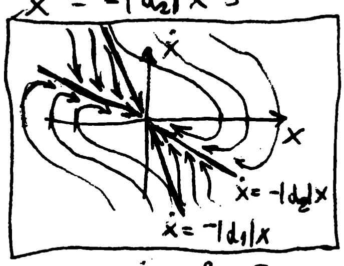
$|\alpha_1|>|\alpha_2|$

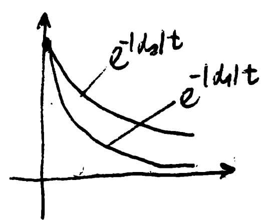



тогда $x(t)=C_1e^{-|\alpha_1|t}+C_2e^{-|\alpha_2|t}$ ← зависимость от времени

$(\alpha_1=-|\alpha_1|)$

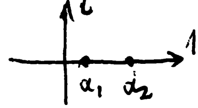
$\Rightarrow$ $\left.\begin{aligned}\dot x&=-|\alpha_1|x\\ \dot x&=-|\alpha_2|x\end{aligned}\right\}$ - фазовые траектории




"устойчивый узел"

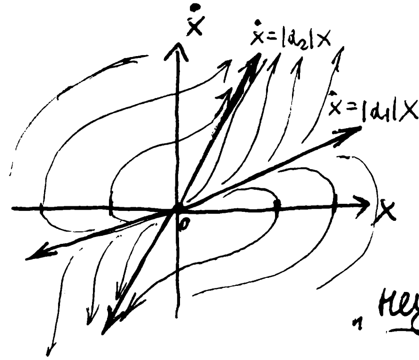
② $\alpha_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\alpha_{1,2} > 0$



$|\alpha_1| < |\alpha_2|$

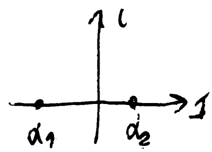
по прежнему $x(t) = C_1 e^{+|\alpha_1| t} + C_2 e^{+|\alpha_2| t} \xrightarrow[t \to \infty]{} C_2 e^{|\alpha_2| t}$

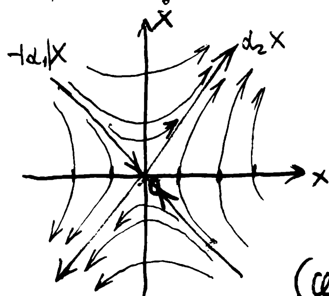
$$\begin{cases} \dot{x} = |\alpha_1| x \\ \dot{x} = |\alpha_2| x \end{cases}$$




„неустойчивый узел"

③ $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_{1,2} \in \mathbb{R}$



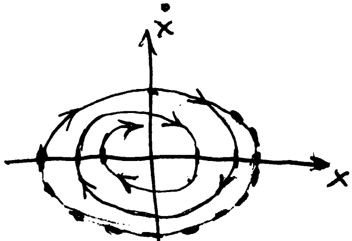


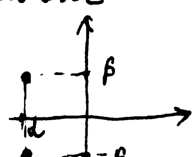

$x(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} C_2 e^{\alpha_2 t}$

(„седло")

④ $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$.

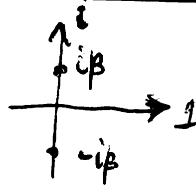
$x(t) = A e^{\alpha t} \cos(\beta t + \varphi)$, $A, \varphi$ – нач. условия



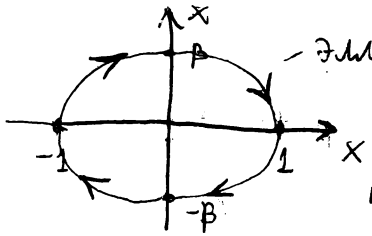




„Устойчивый фокус"

⑤ $x(t) = A\cos(\beta t + \varphi)$ $\boxed{\begin{matrix}\lambda_{1,2} = \pm i\beta \\ \alpha = 0\end{matrix}}$



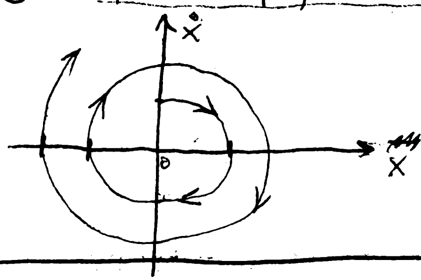

$\dot{x}(t) = -\beta A \sin(\beta t + \varphi)$




– эллипс

„центр"

⑥ $\lambda_{1,2} = |\alpha| \pm i\beta$, $\alpha = |\alpha| > 0$



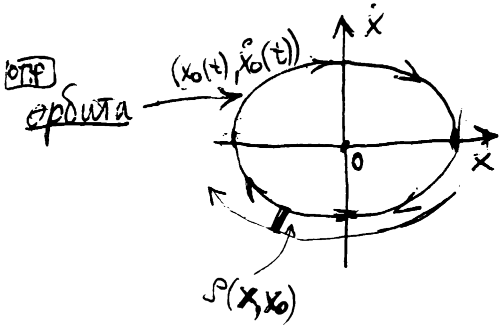

„неустойчивый фокус"

| замечание | уст. по Ляп. | асимпт. уст. по Ляп. |
|---|---|---|
| уст. фокус | + | + |
| центр | + | − |
| неуст. фокус | − | − |
| „уст. узел" | + | + |

Гармоническая линеаризация
+
Уравнение Гольдфарба
=
Метод Гольдфарба

Объект: нелинейные системы – автоколебания

(в лин. системах они невозможны)




ОПР Траектория $(\dot{x}(t), x(t))$ на фазовой плоскости называется асимптотич. уст. относит. орбиты $(\dot{x}_0(t), x_0(t))$, если

$$\rho\big((x(t),\dot{x}(t)),(x_0(t),\dot{x}_0(t))\big)\xrightarrow[t\to\infty]{}0$$

это орбитальная асимптотич. устойчивость

(если $X_0=\mathbb{R}^+$, $x_{(t)}\to 0$, то асс. уст. по Ляп $\sim$ орбит. асс. уст.)

ОПР автоколебания – это асимптотич. устойчивые относительно орбиты движения.

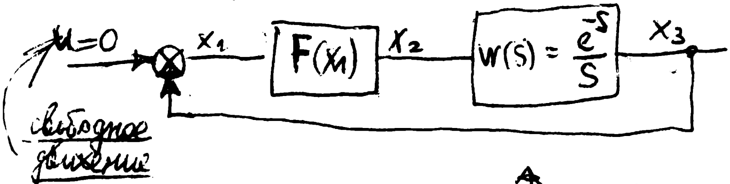
Замеч. Движение типа „центр" орбитально уст., но не асимптотически.

=> в лин. системе не может быть автоколебаний.

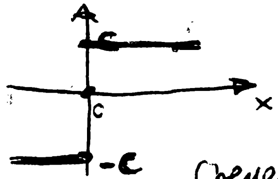
Метод Гольдфарба позволяет вычислить амплитуду и частоту автоколебаний в нелин. системах.

! (в нелинейных амплитуда зависит от частоты. это признак нелинейной системы)

[ПРИМ] Исслед. автоколебаний

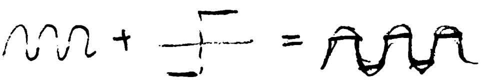



здесь F(x):




$$F(x)=\begin{cases} C, & x>0 \\ -C, & x<0 \end{cases}$$

(релейное звено)



$$\begin{cases} x_3 = W(\hat{p})x_2, & \hat{p}=\frac{d}{dt} \\ x_2 = F(x_1) \\ x_1 = -x_3 \end{cases}$$

Гармоническая линеаризация

пусть $x_1 = a\sin(\omega t)$

$$F(x_1) \overset{\text{ряд}}{\underset{\text{Фурье}}{=}} a_0 + a_1\sin(\omega t) + b_1\cos(\omega t) + a_2\sin(2\omega t) + b_2\cos(2\omega t) + \dots$$

(в „обычной" линеаризации исп. Тэйлора при усл $|x| \ll 1$, а здесь этого условия нет, здесь исп. отклонение от орбиты)

Условие гармонич. линеаризуемости

когда $\dots \ll |a_2| \ll |a_1|$ — „условие фильтра" (так назвали)
$|b_k| \ll \dots \ll |b_2| \ll |b_1|$

при этом условии $F(x_1) \approx K(\hat{p})x_1$ — линейная ф-ия (оператор)

получаем $x_3 = W(\hat{p})x_2 = W(\hat{p})K(\hat{p})x_1 = -W(\hat{p})K(\hat{p})x_3$

$$\Rightarrow \boxed{x_3 = -W(\hat{p})K(\hat{p})x_3}$$

~ как бы $(\lambda E - A)C = 0$

$(1 + W(\hat{p})K(\hat{p}))x_3 = 0$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \varphi = \omega t$$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(a\sin\varphi)\,d\varphi \\ a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(a\sin\varphi)\sin\varphi\,d\varphi \\ b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(a\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi \end{cases}$$

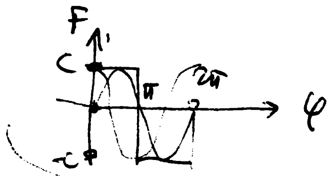
$a_0 = 0$

$F(a\sin\varphi) = F(a\sin(\omega t))$ – периодич

$$K(\hat{p}) = \frac{F(X_1)}{X_1} \approx \frac{a_1\sin(\omega t) + b_1\cos(\omega t)}{a\sin(\omega t)}$$

$$\left[\, b_1\cos(\omega t) = \frac{b_1}{\omega}\underbrace{\frac{d}{dt}}_{\hat{p}}\sin(\omega t) \,\right]$$

$$= \left(\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{a\omega}\hat{p}\right)$$




$$a_1 = \frac{1}{\pi}2\int_0^{\pi} c\sin\varphi\,d\varphi = \frac{2c}{\pi}(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} = \frac{2c}{\pi}(\cos(0) - \cos(\pi)) = \frac{4c}{\pi}$$

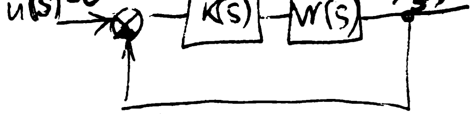
$b_1 = 0$ (из симметричности sin)

$$\Rightarrow \boxed{K(\hat{p}) = \frac{a_1}{a} = \frac{4c}{\pi a}}$$

$\Rightarrow$ условие автоколебаний $\dfrac{e^{-\hat{p}}}{\hat{p}} x_3 = -\dfrac{1}{\frac{4c}{\pi a}} x_3$

Пусть $x_3$ – период. ф-ия. ($\Leftarrow$ автоколеб.)

Какая?




$$W_{замкн} = \frac{X_3(s)}{U(s)} = \frac{K(s)W(s)}{1 + K(s)W(s)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{1 + W(s)K(s)}_{\chi(s)} = 0$$

$\Rightarrow$

условие периодич. движения: $\chi(i\omega)=0$ ($\exists$ чисто мнимый корень $\chi(s)$)

в таком случае $\boxed{1+K(i\omega)W(i\omega)=0}$ $\Rightarrow$ $\omega = \dots$

уравнение Гольдфарба

т.о. $\frac{e^{-\hat{p}}}{\hat{p}} x_3 = \frac{1}{\frac{4c}{a\pi}} x_3 \Leftrightarrow K(\hat{p})W(\hat{p})x_3 = -x_3$, а это и есть при $\hat{p}=i\omega$

Для периодич. движения ур-е Гольдфарба имеет вид:

$$\boxed{\frac{e^{-i\omega}}{i\omega} = -\frac{1}{\frac{4c}{\pi a}}} \xrightarrow[\text{получим}]{} \begin{cases} \omega = \dots \\ a = \dots \end{cases}$$