Предисловие

Методы нечеткой алгебры, формирующие один из новых подходов к анализу и моделированию прикладных задач, находят все более широкое применение. Увеличивается поток литературы об этих методах и их конкретных приложениях, что, несомненно, отражает рост популярности данной проблематики среди специалистов. В настоящее время к нечеткой логике привлечено внимание широкого круга исследователей, работающих в таких областях прикладной математики как обработка информации, моделирование, исследование операций, управление, прогнозирование, а также в различных социально-экономических науках. Возможность успешного применения подходов, основанных на нечеткости, во многом определяется гибким математическим аппаратом, используемым при анализе и обработке данных, способным адекватно отразить не только не подлежащие строгой формализации зависимости и взаимосвязи, но и учесть неточные, субъективные оценки специалистов, лежащие в их основе.

Авторский коллектив постарался изложить в монографии современные основы нечеткой алгебры, рассматривая ее как расширение булевой. Это естественное расширение традиционной двузначной логики позволяет создавать гибкие конструкции, лежащие в основе моделирования трудноформализуемых процессов. В главе 1 вводится система логических операций, построение которой основано на обобщении обычных (стандартных) логических операций. Следуя логике изложения, операции над нечеткими множествами и отношениями определены не на основе традиционных максминных операций, а на основе ранее введенных логических операций: инвертора, t-нормы, t-конормы, что позволяет более гибко подходить к формализации прикладных задач средствами нечеткой логики. Выбор материала для монографии осуществлялся авторами на основе требований системности изложения и необходимости последующего использования тех или иных сведений в конкретных приложениях. Отметим, что в рамках одной монографии невозможно отразить все многочисленные на сегодняшний день разделы теории нечеткой алгебры, по различным направлениям которой существуют разнообразные пособия и статьи. В библиографии приведен список использованной монографической и обзорной литературы, по которой можно ознакомиться и с другими разделами нечеткой алгебры.

В главе 2 рассматривается ряд приложений нечеткой алгебры: нечеткие реляционные уравнения, модели и методы принятия решений в условиях неопределенности, нечеткие системы вывода, гибридные нейро-нечеткие системы. Основное внимание здесь уделяется не непосредственному практическому использованию тех или иных методов, а описанию возможных приложений и их теоретическому обоснованию. Все указанные приложения могут использоваться в различных системах искусственного интеллекта: нечеткие реляционные уравнения — в системах медицинской и иной диагностики, модели принятия решений — в системах поддержки принятия решений, нечеткие и нейро-нечеткие системы — в системах управления различными процессами. В главе 2 представлено математическое наполнение названных систем, приведены подходы к их моделированию, необходимые алгоритмы и примеры использования алгоритмов при решении типовых задач. Математические модели и методы, лежащие в основе функционирования систем, опираются на введенные в главе 1 операции над нечеткими множествами и отношениями; выбор того или иного вида операции зависит от конкретной постановки задачи и, как правило, вопрос такого выбора должен решаться индивидуально для каждой проблемной ситуации. Авторы, указывая на возможный спектр операций, обосновывают или дают рекомендации по конкретному выбору операций.

Глава 1 ориентирована на широкий круг читателей, поэтому ее изложение построено в доступной и понятной форме со множеством графических иллюстраций. При этом от читателя требуется предварительное знакомство с основами общей алгебры и математической логики. Глава 2 адресована специалистам и разработчикам систем, знакомым с основами линейной алгебры, математического моделирования, теории принятия решений, базовыми понятиями нейронных сетей и методами оптимизации.

Основу монографии составляют идеи и работы С.Л. Блюмина. Глава 1 написана И.В. Черпаковым (пп. 1.1, 1.4), И.А. Шуйковой (пп. 1.2, 1.3), Глава 2 — И.В. Черпаковым (п. 2.1), И.А. Шуйковой (п. 2.2), П.В. Сараевым (пп. 2.3, 2.4). Окончательное редактирование всего текста монографии выполнено С.Л. Блюминым.

Авторы выражают благодарность рецензентам Ю.И. Кудинову и О.Я. Кравцу, замечания которых были полезны при подготовке данного издания. Авторы будут благодарны всем, кто пожелает сообщить свои отзывы на данную монографию.

1. Основы нечеткой алгебры

1.1. Операции на единичном интервале

1.1.1. Нечеткая алгебра как расширение булевой

Булева алгебра представляет собой структуру $< B, 0, 1,', +, \cdot >$, для которой справедлива следующая система аксиом [5]:

1) $x + x = x$, $x \cdot x = x$ (идемпотентность);
2) $x + y = y + x$, $x \cdot y = y \cdot x$ (коммутативность);
3) $x + (y + z) = (x + y) + z$, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (ассоциативность);
4) $x + x \cdot y = x$, $x \cdot (x + y) = x$ (поглощение);
5) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$ (дистрибутивность);
6) $x + 0 = x$, $x \cdot 1 = x$;
7) $x + x' = 1$, $x \cdot x' = 0$.

Приведенная система аксиом является зависимой. Можно, например, ограничиться только тождествами 2) и 5)–7).

В классической логике операции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции на двухэлементном множестве $\{0; 1\}$ задают таблично

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

или определяют на этом множестве следующие функции: $\bar{x} = 1 - x$, $x \wedge y = \min(x, y)$ и $x \vee y = \max(x, y)$. Подобным образом в булевой алгебре на $\{0; 1\}$ вводятся соответственно операции $'$,$\cdot$ и $+$. Несложно проверить, что они удовлетворяют указанной выше системе аксиом.

При переходе к нечеткой алгебре, вводимой на $[0, 1]$, выполнимость части аксиом нарушается. Например, сохраняя стандартный вид дополнения $x' = 1 - x$, имеем невыполнимость законов 7) для произвольного $x \in [0, 1] : \max(x, 1 - x) \neq 1$ и $\min(x, 1 - x) \neq 0$.

Стремление наиболее полно сохранить выполнимость аксиом приводит к необходимости изменения существующих операций или введения новых. Можно добиться выполнимости законов 7), если положить

$x \oplus y = \min(1, x+y)$ и $x \otimes y = \max(0, x+y-1)$. В этом случае для произвольного $x \in [0,1]$ выполняются $x \oplus x' = 1$ и $x \otimes x' = 0$. Легко проверить, что $\oplus$ и $\otimes$ коммутативны, ассоциативны, но не связаны дистрибутивным законом. Более того, существует связь между старыми и новыми операциями: $x \otimes (y \vee z) = (x \otimes y) \vee (x \otimes z)$ и $x \oplus (y \wedge z) = (x \oplus y) \wedge (x \oplus z)$, то есть имеется дистрибутивность $\oplus$ и $\otimes$ относительно $\wedge$ и $\vee$ соответственно.

Нечеткая алгебра представляет собой структуру $< X, +, \cdot, ^{-}, 0, 1 >$ с заданной системой аксиом. Символы операций выбраны исключительно для простоты формулировок, их не следует воспринимать как соответствующие арифметические или логические операции. Пусть $x \wedge y = (x + \overline{y} \cdot y)$, $x \vee y = (x \cdot \overline{y}) + y$. Система аксиом, адекватная нечеткой алгебре, имеет вид (например, [8]):

1.	$x + y = y + x$,	1'.	$x \cdot y = y \cdot x$,
2.	$x + (y + z) = (x + y) + z$,	2'.	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,
3.	$x + \overline{x} = 1$,	3'.	$x \cdot \overline{x} = 0$,
4.	$x + 1 = 1$,	4'.	$x \cdot 0 = 0$,
5.	$x + 0 = x$,	5'.	$x \cdot 1 = 1$,
6.	$x + y = \overline{x} \cdot \overline{y}$,	6'.	$x \cdot y = \overline{x} + \overline{y}$,
7.	$x = \overline{(\overline{x})}$,		
8.	$\overline{0} = 1$,		
9.	$x \vee y = y \vee x$,	9'.	$x \wedge y = y \wedge x$,
10.	$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$,	10'.	$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,
11.	$x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$.	11'.	$x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$.

Подалгебра тех элементов из X, для которых $x + x = x$ (или, что равносильно, $x \cdot x = x$), является булевой алгеброй, в которой $x + y = x \vee y$, $x \cdot y = x \wedge y$.

Выбирая различные операции $+, \cdot, ^{-}, 0, 1$, удовлетворяющие указанной системе аксиом, получаем различные нечеткие алгебры.

1.1.2. Расширение стандартных логических операций

В [3,39] изложены основы обобщения обычных логических операций.

Рассмотрим действительный отрезок $L = [0,1]$. Отображения $L \to L$ и $L^2 \to L$ будем рассматривать как унарную и бинарную функции соответственно. Введем на L новые операции.

Определение 1.1. *Инвертором (нечетким отрицанием)* N называется унарная строго убывающая функция, удовлетворяющая условиям $N(N(x)) = x$, $N(0) = 1$ и $N(1) = 0$.

В аксиоматической форме:

$N : L \to L$,

N1: $N(0) = 1$;

N2: $(\forall x \in L)(N(N(x)) = x)$;

N3: $(\forall x_1, x_2 \in L)(x_1 < x_2 \to N(x_1) > N(x_2))$.

Аксиома N1 — граничное условие, устанавливающее поведение инвертора на границе отрезка, N2 — правило двойного отрицания, N3 — наиболее существенное требование: изменение порядка последовательности значений из L.

Из N1 и N2 следует, что $N(1) = 0$, поэтому, заменив N1 на $N(1) = 0$, получим эквивалентную систему аксиом.

Пример 1.1. Существует множество функций, удовлетворяющих N1–N3. Наиболее простая и часто используемая из них $N(x) = 1 - x$. Определяя инвертор подобным образом, имеем выполнимость всех аксиом: $N(0) = 1 - 0 = 1$, $N(N(x)) = 1 - (1 - x) = x$ и $1 - x_1 < 1 - x_2$ при $x_1 > x_2$. Нередко данную функцию называют *стандартным инвертором* и обозначают $N_S(x)$.

В качестве нетривиального примера можно указать

$$N(x) = \begin{cases} -4x + 1, & 0 \leqslant x < 0.2, \\ -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}, & 0.2 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

■

Пусть на множестве M определена бинарная функция $O : M^2 \to M$, тогда $O(x, y) \in M$ при $(x, y) \in M^2$. Зафиксируем сначала значение $x = x_0 \in M$, затем $y = y_0 \in M$. Будем называть полученные унарные функции O_1 и O_2 *частными функциями* O. Если, например, для фиксированного y_0 имеет место $O_1(x_1) < O_1(x_2)$ при $x_1 > x_2$, то O_1 — функция, *изменяющая частный порядок* по первой переменной. Если же $O_1(x_1) > O_1(x_2)$ при $x_1 > x_2$, функцию будем называть *сохраняющей частный порядок* по этой переменной. Аналогично можно ввести понятие функции изменяющей (сохраняющей) порядок по второй переменной. В случае, когда функция сохраняет (изменяет) порядок по всем переменным, будем говорить просто о функции, сохраняющей (изменяющей) порядок.

Определение 1.2. *t-нормой T* называется коммутативная, ассоциативная бинарная функция, частные функции которой сохраняют порядок, имеющая 1 в качестве нейтрального элемента и для которой выполняются условия $T(x, 0) = 0$ и $T(x, 1) = x$, $\forall x \in L$.

Аксиоматическое определение t-нормы:

$T : L^2 \to L$,

T1: $(\forall x, y \in L)(T(x, y) = T(y, x))$;

T2: $(\forall x_1, x_2, x_3 \in L)(T(x_1, T(x_2, x_3)) = T(T(x_1, x_2), x_3))$;

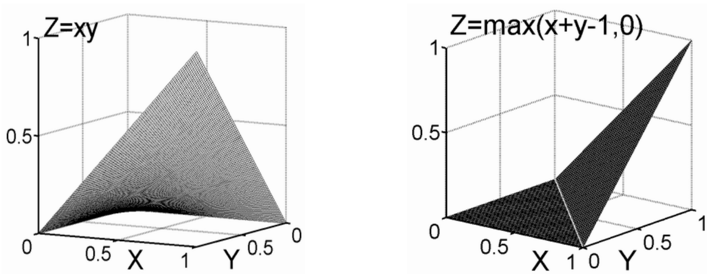
T3: $(\forall x \in L)(T(x, 1) = x,\ T(x, 0) = 0)$;

T4: $(\forall x_1, x_2, y_0 \in L)(x_1 \leqslant x_2 \to T(x_1, y_0) \leqslant T(x_2, y_0))$.

Пример 1.2. Типичной t-нормой является взятие минимума (логическое произведение) $M(x, y) = \min(x, y)$. Другие часто используемые t-нормы: t-норма Лукасевича (Lukasiewicz) или граничное произведение $W(x, y) = \max(x + y - 1, 0)$, алгебраическое произведение $P(x, y) = xy$ и драстическое произведение

$$T_d(x, y) = \begin{cases} y, & x = 1; \\ x, & y = 1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На рис. 1.1 в единичном кубе изображены $P(x, y)$ и $W(x, y)$. ■



а) алгебраическое произведение б) t-норма Лукасевича

Рис. 1.1. Основные t-нормы

В дальнейшем будем считать t-норму непрерывной функцией. Укажем некоторые важные свойства, непосредственно следующие из T1 – T6.

PT1: $(\forall x, y \in L)(T(x,y) \leqslant \min(x,y))$.

Доказательство. Из T3 и T4 следует, что $T(x,y) \leqslant x$. Действительно, $\forall y \in L$, $y \leqslant 1$ при фиксированном x выполняется $T(x,y) \leqslant T(x,1) = x$. Используя T1, получим $T(x,y) \leqslant y$. Учитывая предыдущее неравенство, имеем $T(x,y) \leqslant \min(x,y)$. □

PT2: $(\forall x, y \in L)(T(x,y) \geqslant T_d(x,y))$.

Доказательство. При $x \neq 1$, $y \neq 1$ справедливо

$$T(x,y) \geqslant T_d(x,y) = 0.$$

Если $x = 1$, то $T(1,y) = y = T_d(1,y)$. Аналогично, при $y = 1$ $T(x,1) = x = T_d(x,1)$, то есть утверждение справедливо. □

PT3: $(\forall a \in L)(rng(T(x,a)) = [0,a])$.

Доказательство. Для любого $x \in L$ выполняется

$$T(0,a) \leqslant T(x,a) \leqslant T(1,a),$$

т.е. $0 \leqslant T(x,a) \leqslant a$. □

Определение 1.3. *t-конормой (s-нормой) S* называется коммутативная, ассоциативная бинарная функция, частные функции которой сохраняют порядок, имеющая 0 в качестве нейтрального элемента, и для которой выполняются условия $S(x,0) = x$ и $S(x,1) = 1$, $\forall x \in L$.

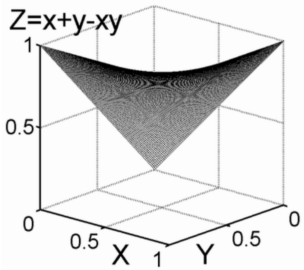
Аксиоматическое определение s-нормы:
$S : L^2 \to L$

S1: $(\forall x, y \in L)(S(x,y) = S(y,x))$;
S2: $(\forall x_1, x_2, x_3 \in L)(S(x_1, S(x_2,x_3)) = S(S(x_1,x_2),x_3))$;
S3: $(\forall x \in L)(S(x,0) = x, S(x,1) = 1)$;
S4: $(\forall x_1, x_2, y_0 \in L)(x_1 \leqslant x_2 \to S(x_1,y_0) \leqslant S(x_2,y_0))$.

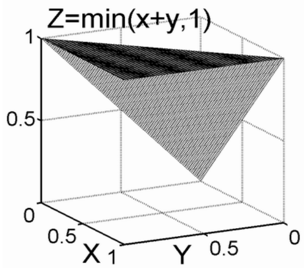
Пример 1.3. Логическая сумма $S(x,y) = \max(x,y)$ является типичной t-конормой. Кроме нее можно указать алгебраическую сумму $S(x,y) = x + y - xy$, граничную сумму $S(x,y) = \min(x+y,1)$ и драстическую сумму

$$S_d(x,y) = \begin{cases} y, & x = 0; \\ x, & y = 0; \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На рис. 1.2 в единичном кубе изображены алгебраическая и граничная сумма. ■



а) алгебраическая сумма



б) граничная сумма

Рис. 1.2. Основные t-конормы

Пусть t-конорма непрерывна. Укажем некоторые ее свойства, следующие из S1 – S4:

PS1: $(\forall x, y \in L)(S(x,y) \geqslant \max(x,y))$.

Доказательство. Из S3 и S4 следует, что $S(x,y) \geqslant x$. Действительно, для любого $y \in L, y \geqslant 0$ при фиксированном x выполняется $S(x,y) \geqslant S(x,0) = x$. Используя S1, получим $S(x,y) \geqslant y$. Учитывая предыдущее неравенство, имеем $S(x,y) \geqslant \max(x,y)$. □

PS2: $(\forall x, y \in L)(S(x,y) \leqslant S_d(x,y))$.

Доказательство. При $x \neq 0, y \neq 0$ справедливо

$$S(x,y) \leqslant S_d(x,y) = 1.$$

Если $x = 0$, то $S(0,y) = y = S_d(0,y)$. Аналогично, при $y = 0$ выполняется $S(x,0) = x = S_d(x,0)$, то есть утверждение справедливо. □

PS3: $N(T(N(x), N(y)))$ удовлетворяет S1–S4, где T и N — любые t-норма и инвертор соответственно.

t-норма и t-конорма играют важную роль в ряде приложений, связанных с нечеткими выводами, системами управления и т.д. В [3] описано их применение в различных сферах промышленности и экономики.

Рассмотренные понятия представляют собой классы функций. Встречаются семейства t-норм, зависящих от параметра. К ним относятся

- $T_S(x,y) = \log_S \left(1 + \dfrac{(s^x - 1)(s^y - 1)}{s - 1}\right)$, $0 < s < \infty$ — семейство t-норм Франка,

- $T_\lambda(x,y) = \dfrac{xy}{\lambda + (1-\lambda)(x+y-xy)}$, $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$ — семейство t-норм Хамакера.

Возможность выбора наиболее подходящей для конкретной задачи функции обеспечивает достаточную гибкость и эффективность на практике. Чаще всего, правда, используются логические произведение и сумма.

Определение 1.4. *Импликатором* I называется бинарная функция, частные функции которой изменяют порядок по первой переменной, сохраняют по второй, и для которой выполняются условия $I(x,1) = 1$, $I(1,y) = y$, $I(0,y) = 1$, $\forall x, y \in L$.

Аксиоматическое определение импликатора:

$I : L^2 \to L$,

I1: $(\forall x_1, x_2, y_0 \in L)(x_1 \leqslant x_2 \to I(x_1, y_0) \geqslant I(x_2, y_0))$;

I2: $(\forall x_0, y_1, y_2 \in L)(y_1 \leqslant y_2 \to I(x_0, y_1) \leqslant I(x_0, y_2))$;

I3: $(\forall x, y \in L)(I(x,1) = 1, I(1,y) = y, I(0,y) = 1)$.

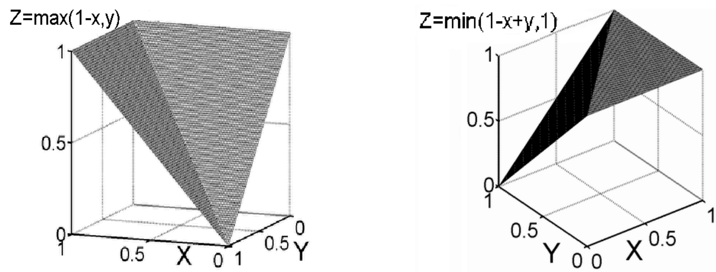
Пример 1.4. Ниже приведены некоторые часто используемые импликаторы:

$$I(x,y) = 1 - x + xy;$$

$$I(x,y) = \max(1-x, y) \text{ — импликатор Клина-Дайнеса (Kleene-Dienes)};$$

$$I(x,y) = \min(1-x+y, 1) \text{ — импликатор Лукасевича}.$$

На рис. 1.3 изображены два последних импликатора. ■



а) импликатор Клина-Дайнеса б) импликатор Лукасевича

Рис. 1.3. Основные импликаторы

Укажем без доказательств свойства импликатора, следующие из I1-I3 и определений t-нормы и t-конормы:

PI1: $N(T(x, N(y)))$ удовлетворяет I1-I3 для любых N и T.

PI2: $S(N(x), y)$ удовлетворяет I1-I3 для любых N и S.

PI3: Если $I(x, y)$ представим в виде $N(T(x, N(y)))$ или $S(N(x), y)$, то для любого $a \in L$ имеет место
$rng(I(x, a)) = [a, 1]$,
$rng(I(a, x)) = [N(a), 1]$,
где rng — образ соответствующих функций.

PI4: $I(x, 0)$ как унарная функция является инвертором.

Свойства PI1 и PI2 позволяют конструировать неограниченное число импликаторов. Говорят, что инвертор N и t-норма T *индуцируют* импликатор $I_{T,N}$, если он представим в виде $N(T(x, N(y)))$. Нетрудно заметить, что импликаторы примера 1.4 индуцированы стандартным инвертором и известными t-нормами M, P и W:

$$I_{M,N_S}(x, y) = \max(1 - x, y),$$
$$I_{P,N_S}(x, y) = 1 - x + xy,$$
$$I_{W,N_S}(x, y) = \min(1 - x + y, 1).$$

Форма связывания $I(x, y)$ с $T(x, y)$ и $S(x, y)$ подобна формулам обычной логики $x \to y = \overline{x} \wedge \overline{y}$ и $x \to y = \overline{x} \vee y$. Непосредственно проверяется, что конъюнкция, дизъюнкция и импликация представляют собой частные случаи t-нормы, t-конормы и импликатора, удовлетворяя соответствующим системам аксиом.

Среди множества пар t-норм и t-конорм удобно выбирать такие, которые удовлетворяют условиям

$$N(T(x, y)) = S(N(x), N(y)),$$
$$N(S(x, y)) = T(N(x), N(y)).$$

Для четких множеств эти формулы соответствуют закону де Моргана, в нашем случае они носят название нечетких законов де Моргана. Используя аксиомы нечеткого отрицания, t-нормы и t-конормы, из одной из этих формул можно вывести другую. Если выбранные t-норма и t-конорма удовлетворяют этим законам, они называются *взаимно дуальными* на основе соответствующего нечеткого отрицания.

1.2. Нечеткие множества. Операции над нечеткими множествами

Прежде чем перейти к основам нечетких множеств, изложим основные понятия нечеткой логики.

1.2.1. Нечеткие высказывания и операции над ними

Нечеткие высказывания вводятся в работе [22], в ней же определены операции над высказываниями на основе классического максминного подхода. В этом разделе для сохранения логики изложения все операции будут определены на основе более универсального подхода, основанного на использовании t-норм и t-конорм.

Определение 1.5. *Нечеткое высказывание* $\tilde{A}$ — предложение, относительно которого можно судить о степени его истинности или ложности в настоящее время. Степень истинности $d(\tilde{A})$ принимает значения из $[0, 1]$.

Значения 0 и 1 — предельные значения степени истинности и совпадают с понятиями «лжи» и «истины» для четких высказываний. Нечеткие высказывания со степенью истинности 0.5 называются *индифферентностью*, поскольку они истинны в той же мере, что и ложны.

Пример 1.5. «2 — маленькое число» — нечеткое высказывание, степень истинности которого может быть равна 0.9. ■

Определение 1.6. *Отрицанием* нечеткого высказывания $\tilde{A}$ является высказывание $\neg\tilde{A}$, степень истинности которого определяется выражением $d(\neg\tilde{A}) = N(d(\tilde{A}))$, где N — инвертор.
В частности, если $N(x) = 1 - x$, то $d(\neg\tilde{A}) = 1 - d(\tilde{A})$. Степень ложности высказывания $\neg\tilde{A}$ совпадает со степенью истинности для $\tilde{A}$.

Определение 1.7. *Конъюнкцией* нечетких высказываний $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется нечеткое высказывание $\tilde{A} \wedge \tilde{B}$, степень истинности которого определяется следующим образом: $d(\tilde{A} \wedge \tilde{B}) = T(d(\tilde{A}), d(\tilde{B}))$, где T — t-норма. В частности, если $T(x, y) = min(x, y)$, то $d(\tilde{A} \wedge \tilde{B}) = min(d(\tilde{A}), d(\tilde{B}))$ и степень истинности конъюнкции высказываний будет совпадать со степенью истинности менее истинного высказывания.

Определение 1.8. *Дизъюнкцией* нечетких высказываний $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется нечеткое высказывание $\tilde{A} \vee \tilde{B}$, степень истинности которого определяется следующим образом: $d(\tilde{A} \vee \tilde{B}) = S(d(\tilde{A}), d(\tilde{B}))$, где S — t-конорма. В частности, если $S(x, y) = max(x, y)$, то $d(\tilde{A} \vee \tilde{B}) = max(d(\tilde{A}), d(\tilde{B}))$ и степень истинности дизъюнкции высказываний будет совпадать со степенью истинности более истинного высказывания.

Определение 1.9. *Импликацией* нечетких высказываний $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется нечеткое высказывание $\tilde{A} \to \tilde{B}$, степень истинности которого $d(\tilde{A} \to \tilde{B}) = I(d(\tilde{A}), d(\tilde{B}))$, где I — импликатор.

Если $I(x, y) = max(1 - x, y)$, то $d(\tilde{A} \to \tilde{B}) = max(1 - d(\tilde{A}), d(\tilde{B}))$. В этом случае истинность импликации не меньше, чем степень ложности ее посылки или степень истинности ее следствия.

Определение 1.10. *Эквивалентностью* нечетких высказываний $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется нечеткое высказывание $\tilde{A} \leftrightarrow \tilde{B}$.
$\tilde{A} \leftrightarrow \tilde{B} = (\tilde{A} \to \tilde{B}) \wedge (\tilde{B} \to \tilde{A})$, где $I = I_{T,N}$. Операция $\wedge$ определяется t-нормой T.

Порядок выполнения операций над нечеткими высказываниями: скобки, отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность.

1.2.2. Нечеткие множества

Определение 1.11. Множество A — *четкое множество*, если A — часть некоторого универсального для данной прикладной задачи множества U, характеризующегося условиями:

- все элементы множества четко различимы между собой, во множестве нет нескольких экземпляров некоторых элементов;
- относительно каждого элемента $u \in U$ можно четко определить, принадлежит он множеству A или нет.

Эти условия позволяют охарактеризовать четкое множество его *характеристической функцией*, заданной на универсальном множестве U и принимающей значения в множестве $\{0, 1\}$:

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 0, & u \notin A; \\ 1, & u \in A; \end{cases} \quad u \in U.$$

Отказ от первого условия приводит к более общему, чем множество, понятию комплекта, допускающего наличие нескольких экземпляров некоторых элементов. *Комплект* характеризуется *функцией экземплярности*, заданной на универсальном множестве U и принимающей значения во множестве неотрицательных целых чисел: $\psi_A(u) \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Значением функции является число экземпляров элемента $u \in U$ в комплекте A.

Отказ от второго условия приводит к более общему, чем множество, понятию *нечеткого множества*, допускающего определение лишь некоторой степени принадлежности элементов такому множеству.

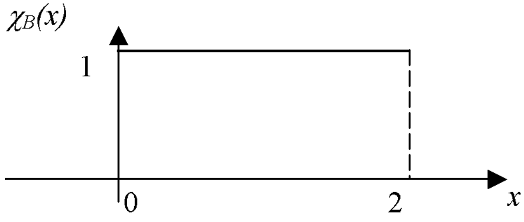


Рис. 1.4. График характеристической функции множества $B = \{x|0 \leqslant x \leqslant 2\}$

Определение 1.12. *Нечетким подмножеством* $\tilde{A}$ множества X называется совокупность пар вида $\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x))\}$, где $x \in X$, а $\mu_A(x)$ — *функция принадлежности*, ставящая в соответствие множеству X отрезок $[0, 1]$.

Функция принадлежности $\mu_A(x)$ может обозначаться и как $A(x)$. Множество X называется *базовым*, или базовой шкалой. Нечеткое множество $\varnothing$ — *пустое*, если $\mu_\varnothing(x) = 0$ для каждого $x \in X$. Нечеткое множество X — *универсальное*, если $\mu_X(x) = 1$ для каждого $x \in X$. Функция принадлежности выбирается субъективно, зависит от цели построения множеств, решаемой задачи и т.д.

Пример 1.6. $B = \{x|0 \leqslant x \leqslant 2\}$. Характеристическая функция множества B принимает значения 1, если $0 \leqslant x \leqslant 2$ и значения 0 в противном случае. Ее график приведен на рис. 1.4. ■

Пример 1.7. Пусть X — множество студентов. X={«Иванов», «Петров», «Андреев», «Володин»}. Тогда можно определить нечеткое множество ответственных студентов так: $\tilde{A}$ ={(«Иванов»; 1), («Петров» ; 0.4), («Андреев»; 0.6), («Володин»; 0.8)}. ■

Если нечеткое множество $\tilde{A}$ дискретно, то для его описания может быть использована следующая форма записи: $\tilde{A} = x_1/\mu_1 + \ldots + x_n/\mu_n$. График функции принадлежности любому нечеткому множеству может представлять собой набор точек, если функция дискретна, или некоторую кривую, если функция непрерывна.

Пример 1.8. $\tilde{C} = \{x|$«значения x близко к 1»$\}$ — нечеткое множество. График функции принадлежности может выглядеть, как на рис. 1.5. ■

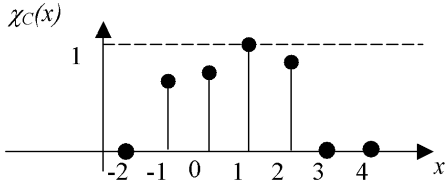


Рис. 1.5. График функции принадлежности множеству $\tilde{C} = \{x|$«значения x близко к 1»$\}$

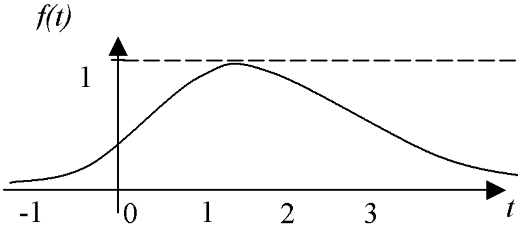


Рис. 1.6. График функции принадлежности $f(t) = \exp^{-\beta\cdot(t-1)^2}$ множеству $\tilde{C}$

Функцию принадлежности нечеткого множества $\tilde{C}$ можно определить аналитически как $f(t) = \exp^{-\beta\cdot(t-1)^2}$, где β — положительное вещественное число. Для этого случая график функции приведен на рис. 1.6.

Определение 1.13. *Носителем* нечеткого множества называется подмножество $supp(\tilde{A})$ множества X, содержащее те элементы из X, для которых значения функции принадлежности $\mu_A(x) > 0$. Носитель нечеткого множества — это множество в обычном смысле.

$$supp(\tilde{A}) = \{x \in X|\mu_A(x) > 0\}.$$

Пример 1.9. Пусть X — множество натуральных чисел. Тогда его нечеткое подмножество $\tilde{M}$ очень малых чисел может быть таким:

$$\tilde{M} = \{(1;1), (2;0.8), (3;0.7), (4;0.6), (5;0.5), (6;0.3)\}.$$

Множество $M = \{1,2,3,4,5,6\}$ является носителем нечеткого множества $\tilde{M}$. Это обычное четкое подмножество множества X. ■

Определение 1.14. α-уровень нечеткого множества $\tilde{A}$ — четкое множество, обозначаемое $[\tilde{A}]^{\alpha}$ и определяемое:

$$[\tilde{A}]^{\alpha} = \begin{cases} \{t \in X | \mu_A(t) \geq \alpha\}, & \alpha > 0; \\ \overline{supp(\tilde{A})} & \alpha = 0; \end{cases}$$

где $\overline{supp(\tilde{A})}$ — замыкание носителя множества $\tilde{A}$.

Пример 1.10. $\tilde{A} = \{(-2; 0), (-1; 0.3), (0; 0.6), (1; 1.0), (2; 0.6), (3; 0.3), (4; 0)\}$.

$$[\tilde{A}]^{\alpha} = \begin{cases} \{-1, 0, 1, 2, 3\}, & 0 \leqslant \alpha \leqslant 0.3; \\ \{0, 1, 2\}, & 0.3 < \alpha \leqslant 0.6; \\ \{1\}, & 0.6 < \alpha \leqslant 1. \end{cases}$$

■

Определение 1.15. Пусть $\tilde{A}$ — нечеткое подмножество множества X, $\tilde{B}$ — нечеткое подмножество множества Y. *Декартовым произведением* нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется и через $\tilde{A} \times \tilde{B}$ обозначается множество всех пар вида $\tilde{A} \times \tilde{B} = \{((x, y), \mu_{A\times B}(x, y)) | x \in X, y \in Y\}$, где

$$\mu_{A\times B}(x, y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y)).$$

1.2.3. Нечеткие переменные. Лингвистические переменные

В прикладных исследованиях по проблемам управления, в технических науках, медицине, социологии, экономике, психологии и т.д. широко используются экспертные оценки, которые специалистам удобнее формулировать в терминах естественного языка. С этой целью используются нечеткие и лингвистические переменные.

Определение 1.16. *Нечеткая переменная* характеризуется тройкой $< X,\ U, \tilde{A} >$, где X — наименование переменной, U — универсальное множество (область определения), $\tilde{A}$ — нечеткое множество на X, описывающее ограничения на значения нечеткой переменной.

Операции над нечеткими переменными определяются так же, как и для нечетких высказываний. Примером нечеткой переменной является, в частности, функция принадлежности нечеткому множеству.

Пример 1.11. Совокупностью вербальных оценок, описывающих возраст человека, может являться множество {«юный», «молодой», «зрелый», «преклонный», «старый»}. Определенный возраст человека можно рассматривать при этом как нечеткую переменную, областью определения которой является отрезок $U = [0, 100]$.

Рассмотрим нечеткую переменную «молодой возраст» — $\tilde{x}$. Всевозможные значения возраста $U = [0, 100]$ — область определения переменной. Нечеткое множество $\tilde{A}$ «молодой» (рис.) для переменной $\tilde{x}$ можно задать функцией принадлежности:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < 25; \\ \left(1 + \left(\frac{x-25}{5}\right)^2\right)^{-1}, & 25 \leqslant x \leqslant 100. \end{cases}$$

■

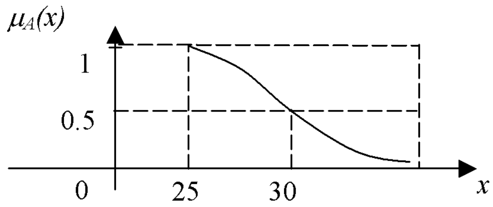


Рис. 1.7. Графическое представление переменной «молодой возраст»

Определение 1.17. *Лингвистическая переменная* характеризуется кортежем $< X, T(X), U, G, M >$, где X – имя переменной, $T(X)$ — множество терминов, то есть множество названий лингвистических значений X, U — универсальное множество, G — грамматика, для генерации имен (синтаксические правила), M — множество правил для связи каждого термина t с его значением $M(t)$ (семантические правила).

Пример 1.12. Рассмотрим лингвистическую переменную «Возраст». X=«Возраст» — имя лингвистической переменной. $T(X)$={«Молодой», «Зрелый»,«Пожилой»,«Старый»} — множество терминов. В качестве универсального множества можно рассматривать все возможные значения возраста человека $U = [0, 120]$ — область определения переменной. В качестве синтаксического правила G можно взять, например, бесконтекстную грамматику, с помощью которой возможно порождение из базового терм-множества значений вида: «очень молодой», «совсем не молодой», «не очень молодой, но и не очень зрелый» и т.д. Слова вида «очень», «вполне», «чрезвычайно», а также союзы «и», «или» можно рассматривать как операторы, преобразующие смысл относящихся к ним термов. Семантические правила M, выражающие связь каждого термина t с его значением $M(t)$, могут быть заданы графически, например так, как на рис. 1.7. ■

1.2.4. Включение и равенство нечетких множеств

Так же, как над четкими множествами, определяются логические операции включения, равенства, объединения, пересечения, дополнения и другие; определяются они и над нечеткими множествами, только делается это при помощи функции принадлежности.

Определение 1.18. Пусть заданы нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ на множестве X. $\tilde{A}$ называется *подмножеством* нечеткого множества $\tilde{B}$ и обозначается $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$, если $\mu_A(x) \leqslant \mu_B(x), \forall x \in X$.

График функций принадлежности множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, заданных на множестве X, таких, что $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$, приведен на рис. 1.8.

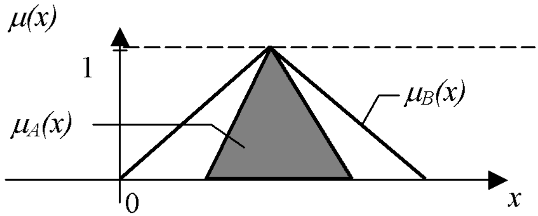


Рис. 1.8. Включение нечетких множеств

Определение 1.19. Пусть заданы нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ на множестве X. Нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ *равны*, если $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ и $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$.
$\tilde{A} = \tilde{B}$, если $\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X$.

1.2.5. Теоретико-множественные операции

Пусть заданы нечеткие множества $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$.
$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x))\}$, $\tilde{B} = \{(x, \mu_B(x))\}$, $x \in X$. Изложение теоретико-множественных операций опирается на определенные ранее операции над нечеткими переменными: отрицание, конъюнкцию, дизъюнкцию.

Определение 1.20. *Объединением* нечетких множеств $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ является множество $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x, \mu_{A \cup B}(x))\}$, $x \in X$, функция принадлежности элементов к которому определяется как $\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$

График функции принадлежности $\mu_{A \cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ приведен на рис. 1.9.

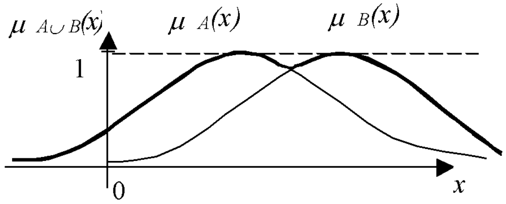


Рис. 1.9. Объединение нечетких множеств

Определение 1.21. *Пересечением* нечетких множеств $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ называется множество $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x, \mu_{A \cap B}(x))\}$, $x \in X$, функция принадлежности элементов к которому определяется как $\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$.

График функции принадлежности $\mu_{A \cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ приведен на рис. 1.10.

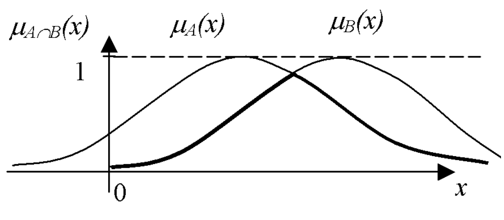


Рис. 1.10. Пересечение нечетких множеств

Определение 1.22. *Дополнением* нечеткого множества $\tilde{A}$ называется множество $\neg\tilde{A} = \{(x, \neg\mu_A(x)\}$, $x \in X$, функция принадлежности элементов к которому определяется как $\mu_{\neg A}(x) = N(\mu_A(x))$.

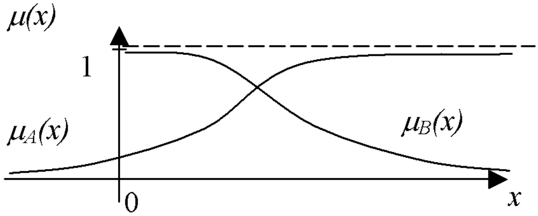


Рис. 1.11. Дополнение нечеткого множества

График функции принадлежности $\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x))$ приведен на рис. 1.11.

Пример 1.13. $\tilde{A} = \{(x_1; 0.3), (x_3; 0.8), (x_6; 0.4)\}$.
$\tilde{B} = \{(x_1; 0.9), (x_2; 0.2), (x_3; 0.4), (x_4; 0.5)\}$.
$\mu_{A \cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.
$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x_1; 0.9), (x_2; 0.2), (x_3; 0.4), (x_4; 0.5), (x_6; 0.4)\}$.
$\mu_{A \cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$.
$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x_1; 0.3), (x_3; 0.4)\}$.
$\mu_{\neg A}(x) = 1 - \mu_A(x))$.
$\neg\tilde{A} = \{(x_1; 0.7), (x_2; 1), (x_3; 0.2), (x_4; 1), (x_5; 1), (x_6; 0.6), (x_7; 1)\}$. ■

Определение 1.23. *Выпуклой комбинацией* множеств $\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_n$ называется множество $\tilde{A}$ с функцией принадлежности $\mu_A(x) = \sum \lambda_i \mu_{A_i}(x)$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum \lambda_i = 1$.

1.2.6. Основные свойства нечетких множеств

1. $\neg(\neg\tilde{A}) = \tilde{A}$ (инволюция).

2. $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$,
   $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$ (коммутативность).

3. $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cup \tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B} \cup \tilde{C}$,
   $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cap \tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C}$ (ассоциативность).
   Для выполнения следующих законов достаточно предъявления требования к выбору операций $\cap$, $\cup$ таким образом, чтобы

$$S(x, y) = N(T(N(x), N(y))).$$

4. $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$,
   $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$ (дистрибутивность).

5. $\neg(\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \neg\tilde{A} \cap \neg\tilde{B}$,
   $\neg(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \neg\tilde{A} \cup \neg\tilde{B}$ (законы де Моргана).

Часть из приведенных свойств основывается на аксиомах нечеткой алгебры.

Отметим, что для нечетких множеств справедливы не все законы, выполняющиеся для четких множеств.

В дальнейшем нечеткие множества будет обозначать без указания знака ˜ (тильда). Из контекста будет понятно, о каком именно множестве идет речь.

1.3. Нечеткие соответствия и отношения

1.3.1. Четкие соответствия и отношения

В приложениях нечеткой логики — нечетких реляционных уравнениях, методах принятия решений — существенно используются нечеткие соответствия, отношения и операции над ними. Рассмотрим вначале соответствующие понятия четкой алгебры [26].

Если A и B — произвольные множества, то символом (a, b) обозначается *пара*, где $a \in A$, $b \in B$. Пары (a, b) и (a', b') считаются равными, если $a = a'$ и $b = b'$.

Множество всех пар $\{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ называется *прямым или декартовым произведением* множеств A и B и обозначается $A \times B$.

Соответствием между множествами A и B в четкой алгебре называется подмножество ρ множества $A \times B$. Если $(a, b) \in \rho$, то говорят, что элемент a находится в отношении ρ с элементом b.

Пусть ρ – бинарное отношение во множестве действительных чисел $\mathbb{R}$. Характеристическая функция соответствия ρ определяется следующим образом:

$$\chi_\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & (a, b) \in \rho; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Соответствие называется *полным*, если оно совпадает с $A \times B$, т.е. состоит из всех пар (a, b).

Пример 1.14. Рассмотрим соответствие R (рис. 1.12), такое, что
$(u, v) \in R \Longleftrightarrow u \in [a, b], v \in [0, c]$

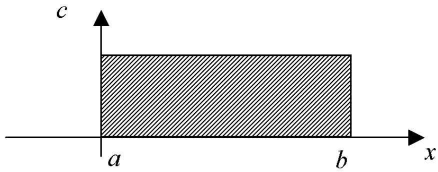


Рис. 1.12. Отношение $(u, v) \in R \Longleftrightarrow u \in [a, b], v \in [0, c]$

$$\chi_\rho(u, v) = \begin{cases} 1, & (u, v) \in [a, b] \times [0, c]; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

■

Пример 1.15. Пусть X — множество мужчин, Y — множество женщин. $X =${Джон,Чарльз, Джеймс}. $Y =${Диана, Рита, Ева}. Тогда соответствие $X \times Y$ «женат на», может быть таким: {(Чарльз, Диана), (Джон, Ева), (Джеймс, Рита)}. ■

Отношением на множестве A называется подмножество декартова квадрата $A \times A$. Другими словами, отношение – это соответствие множества A с самим собой.

Выделяют следующие типы отношений ρ на множестве A.

Рефлексивное — $(x, x) \in \rho$ для всех $x \in A$.

Антирефлексивное — $(x, x) \notin \rho$ для всех $x \in A$.

Симметричное — $(x, y) \in \rho$ влечет за собой $(y, x) \in \rho$.

Антисимметричное — $(x, y) \in \rho$ и $(y, x) \in \rho$ влечет за собой $x = y$.

Транзитивное — $(x, y) \in \rho$ и $(y, z) \in \rho$ влечет за собой $(x, z) \in \rho$.

Пример 1.16. Отношение $\leqslant$, заданное на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$, является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным. Отношение $<$ является антирефлексивным и транзитивным. ■

R — отношение *эквивалентности*, если R рефлексивно, симметрично и транзитивно. Соответствия и отношения можно задавать в теоретико-множественном, матричном виде или в виде ориентированного графа.

1.3.2. Способы задания нечетких соответствий и отношений

Понятия нечетких соответствий и отношений рассматриваются в работах [2, 3, 8, 11, 22, 28, 29, 32, 46].

Определение 1.24. Пусть X, Y — непустые четкие множества. *Нечетким соответствием* R является нечеткое подмножество декартова произведения множеств $X \times Y$. Множество X называют областью отправления, а множество Y — областью прибытия нечеткого соответствия.

Определение 1.25. Пусть X — непустое множество. *Нечетким отношением* R является нечеткое подмножество декартова произведения $X^2 = X \times X$. X называется областью задания нечеткого отношения.

Если R — нечеткое отношение, то $\mu_R(u, v)$ интерпретируется как степень принадлежности пары (u, v) отношению R. Используется и другое обозначение — $R(u, v)$.

В отличие от классических отношений, принадлежность пары к которым определяется характеристической функцией, в нечетких отношениях принадлежность пары определяется функцией принадлежности. Как и при переходе от четких к нечетким множествам, в данном случае происходит отказ от одного из свойств обычных отношений — «относительно каждой пары можно четко утверждать, принадлежит она отношению или нет».

Пример 1.17. Пусть $U = \{1, 2, 3\}$. Нечеткое отношение «приблизительно равняться», заданное на множестве U, может быть определено как:

$\mu_R(1,1) = \mu_R(2,2) = \mu_R(3,3) = 1.$

$\mu_R(1,2) = \mu_R(2,1) = \mu_R(2,3) = \mu_R(3,2) = 0.8.$

$\mu_R(1,3) = \mu_R(3,1) = 0.3.$

Функция принадлежности может быть задана следующим образом:

$$\mu_R(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{если } u = v; \\ 0.8, & \text{если } |u - v| = 1; \\ 0.3, & \text{если } |u - v| = 2. \end{cases}$$

В матричном виде описанное отношение может быть представлено как

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}.$$

■

Существуют три эквивалентных способа задания нечетких соответствий и отношений: теоретико-множественный, матричный и графический. В *матричном виде* нечеткое отношение R, введенное на множестве X, задается с помощью матрицы смежности (инциденций), строки и столбцы которой помечены элементами $x \in X$. На пересечении i-й строки и j-го столбца ставится элемент $r_{ij} = \mu_R(x_i, x_j)$, где μ_R — функция принадлежности элементов из X^2 нечеткому отношению R. В *графическом виде* нечеткое соответствие R можно задать в виде ориентированного графа с множеством вершин $X \cup Y$, каждой дуге $< x_i, y_j >$ которого приписано значение $\mu_R(x_i, y_j)$ функции принадлежности. Для *теоретико-множественного* задания нечеткого соответствия необходимо перечислить элементы множеств X и Y и задать нечеткое множество подмножество в $X \times Y$.

Пример 1.18. Зададим некоторое нечеткое соответствие R, определив X и Y как $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_5\}$, $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$,
$R = \{((x_1, y_2), 0.2), ((x_3, y_1), 1), ((x_3, y_3), 0.4), ((x_4, y_2), 0.3), ((x_5, y_2), 0.7),$ $((x_5, y_3), 0.8)\}$. Граф нечеткого соответствия R изображен на рис. 1.13. Матрица инциденций соответствия R выглядит следующим образом:

$$R = \left(\begin{array}{ccccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 1 & 0 & 0.4 & 0 \\ x_4 & 0 & 0.3 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0.7 & 0.8 & 0 \end{array} \right).$$

■

Определение 1.26. Два нечетких соответствия R и S, заданных на $X \times Y$ равны, если $\mu_R(u, v) = \mu_S(u, v), \forall (u, v) \in X \times Y$.

Так же как над нечеткими множествами можно определить операции и над нечеткими соответствиями и отношениями.

1.3.3. Операции над нечеткими соответствиями и отношениями

Операции над нечеткими отношениями традиционно определяются с использованием максминного подхода. По аналогии с операции над нечеткими множествами ниже предоставлен более общий подход к определению данных операций на основе введенных ранее операций над

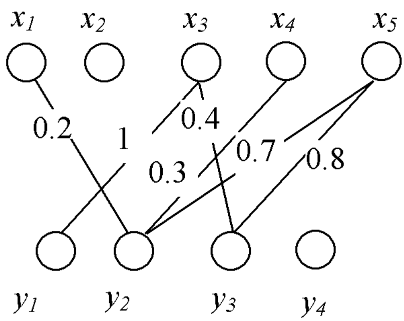


Рис. 1.13. Графическое задание нечеткого соответствия R

нечеткими переменными. Все операции, определенные далее для нечетких соответствий, справедливы и для нечетких отношений.

Пусть R, S — два нечетких соответствия, заданных на $X \times Y$. Для определения операций соответствия должны иметь одинаковую размерность.

Определение 1.27. Дополнением соответствия R называется соответствие $\neg R$ с функцией принадлежности $\mu_{\neg R}(u,v) = N(\mu_R(u,v))$, где N — инвертор.

Определение 1.28. Пересечением соответствий R и S называется соответствие $R \cap S$ с функцией принадлежности $\mu_{R\cap S}(u,v)$.

$$\mu_{R\cap S}(u,v) = \mu_R(u,v) \wedge \mu_S(u,v).$$

Определение 1.29. Объединением соответствий R и S называется соответствие $R \cup S$ с функцией принадлежности $\mu_{R\cup S}(u,v)$.

$$\mu_{R\cup S}(u,v) = \mu_R(u,v) \vee \mu_S(u,v).$$

Пример 1.19. Рассмотрим два нечетких соответствия: R = «x значительно больше, чем y» и S=«x очень близок к y».

$$R = \begin{pmatrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ x_2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

$$S = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0.4 & 0 & 0.9 & 0.6 \\ 0.9 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ 0.3 & 0 & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Соответствие $R \cap S$= «x значительно больше y» и «x близок к y» является пересечением соответствий R и S.

В случае, если операция конъюнкции над нечеткими переменными определяется как операция взятия минимума, то
$\mu_{R\cap S}(u,v) = min\{\mu_R(u,v); \mu_S(u,v)\}$. Тогда

$$R \cap S = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0.4 & 0 & 0.1 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Соответствие $R \cup S$= «x значительно больше y» или «x близок к y» является объединением соответствий R и S.

В случае, если операция дизъюнкции над нечеткими переменными определяется как операция взятия максимума, то
$\mu_{R\cup S}(u,v) = max\{\mu_R(u,v); \mu_S(u,v)\}$. Тогда

$$R \cup S = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0.8 & 0 & 0.9 & 0.7 \\ 0.9 & 0.8 & 0.5 & 0.7 \\ 0.9 & 1 & 0.8 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

■

Определение 1.30. Пусть R — нечеткое соответствие на $X \times Y$. *Проекция соответствия* R на X определяется как нечеткое множество
$\prod_X(R) = \{(x, \mu_{\prod_X(R)}(x))\}$, где

$$\mu_{\prod_X(R)}(x) = \sup\{R(x,y) | y \in Y\}.$$

Проекция соответствия R на Y определяется аналогично
$\prod_Y(R) = \{(y, \mu_{\prod_Y(R)}(y))\}$, где

$$\mu_{\prod_Y(R)}(y) = \sup\{R(x,y) | x \in X\}.$$

Пример 1.20. Для соответствия R = «x значительно больше, чем y»

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

Проекция соответствия R на X является нечетким множеством $\prod_X(R) = \{x_1, x_2, x_3\}$ и определяется следующим образом:

- степень принадлежности, с которой элемент x_1 включается в нечеткое множество, определяется как наибольшее значение из степеней принадлежностей пар $(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_1, y_4)$ соответствию R. То есть $\prod_X(R)(x_1) = 0.8$. Это максимальный элемент в первой строке матрицы;
- $\prod_X(R)(x_2) = 0.8$ — максимальный элемент во второй строке матрицы;
- $\prod_X(R)(x_3) = 1$ — максимальный элемент в третьей строке матрицы.

■

Декартово произведение $A \times B$ двух нечетких множеств A и B, заданных на множествах X и Y соответственно, является нечетким соответствием R на $X \times Y$ (рис. 1.14).

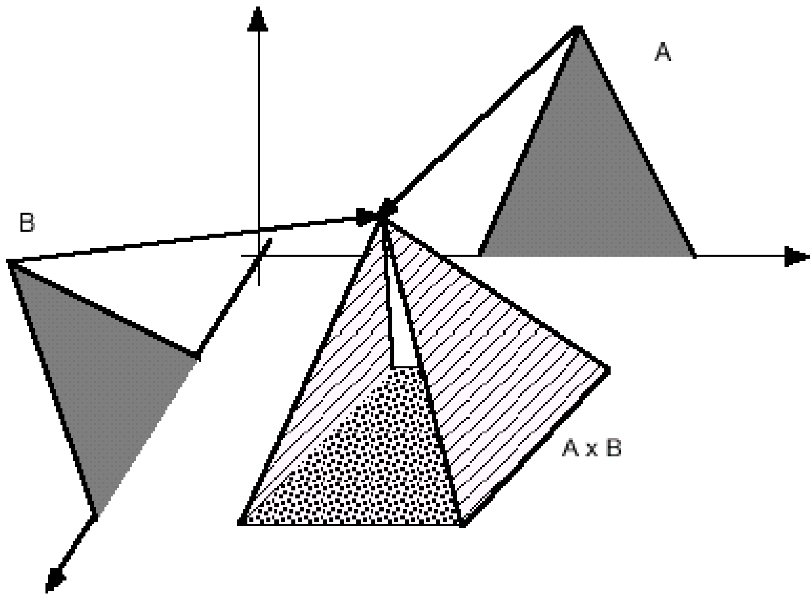


Рис. 1.14. Декартово произведение $A \times B$

Если A и B — обычные множества и их декартово произведение определяется на основе операции взятия минимума, то $\prod_X(A\times B)=A$, $\prod_Y(A\times B)=B$. Действительно,

$$\mu_{\prod_X(x)}=\sup\{\mu_{(A\times B)}(x,y)|y\in Y\}=\sup\{\mu_A(x)\wedge\mu_B(y)|y\}=$$
$$=\min\{\mu_A(x);\sup\{\mu_B(y)|y\}\}=\min\{\mu_A(x);1\}=\mu_A(x).$$

1.3.4. Композиции нечетких соответствий

Определение 1.31. Композицией нечеткого множества A, заданного на множестве X и нечеткого соответствия R, заданного на $X\times Y$, называется нечеткое множество $A\circ R=\{(y,\mu_{A\circ R}(y))\}$.

$$\mu_{A\circ R}(y)=\sup_{x\in X}T\{\mu_A(x);\mu_R(x,y)\},\forall y\in Y,$$

где T — t-норма.

В частном случае в роли T-нормы может выступать операция $\min$.

Композиция $A\circ R$ представляет собой проекцию нечеткого соответствия R на множество A.

Пример 1.21. Пусть множество $X=\{x_1,x_2,x_3\}$. На множестве X задано нечеткое множество $C=\{(x_1,0.2),(x_2,1),(x_3,0.2)\}$. Нечеткое отношение R задано на $X\times X$.

$$R=\begin{pmatrix}1&0.8&0.3\\0.8&1&0.8\\0.3&0.8&1\end{pmatrix}.$$

$sup-min$ композиция множества C на отношение R будет представлять собой нечеткое множество

$$C\circ R=(0.2,1,0.2)\circ\begin{pmatrix}1&0.8&0.3\\0.8&1&0.8\\0.3&0.8&1\end{pmatrix}=(0.8,1,0.8).$$

■

Пример 1.22. Пусть нечеткое множество C задано на единичном отрезке $L=[0,1]$, $\mu_C(x)=x$.

Нечеткое множество R задано на $L\times L$. $\mu_R(x,y)=1-|x-y|$.

$sup-min$ композиция множества C на отношение R определяется как нечеткое множество $C\circ R$, состоящее из пар $(y,\mu_{C\circ R}(y))$.

$$\mu_{C\circ R}(y)=\sup_{x\in[0,1]}\min\{x,1-|x-y|\}=\frac{1+y}{2},\forall y\in[0,1].$$ ■

Определение 1.32. Пусть на $X \times Y$ и $Y \times Z$ заданы нечеткие соответствия $R = \{((u, v), \mu_R(u, v))\}$, $S = \{((v, w), \mu_S(v, w))\}$. Композицией соответствий называется нечеткое соответствие $R \circ S = \{((u, w), \mu_{R \circ S}(u, w))\}$, заданное на $X \times Z$.

$$\mu_{R \circ S}(u, w) = \sup_{v \in Y} T\{\mu_R(u, v), \mu_S(v, w)\},$$

где T — t-норма. В частном случае в роли T-нормы может выступать операция $\min$.

Пример 1.23. Рассмотрим нечеткое отношение R = «x значительно больше, чем y»

$$R = \left(\begin{array}{lllll} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ x_2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{array}\right).$$

Задано также нечеткое отношение S=«y очень близко к z»

$$S = \left(\begin{array}{llll} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ y_2 & 0 & 0.4 & 0 \\ y_3 & 0.9 & 0.5 & 0.8 \\ y_4 & 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{array}\right).$$

$sup - min$ композиция соответствий определяется следующим образом

$$R \circ S = \left(\begin{array}{lllll} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & 0.8 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \\ x_2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ x_3 & 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{array}\right) \circ \left(\begin{array}{llll} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & 0.4 & 0.9 & 0.3 \\ y_2 & 0 & 0.4 & 0 \\ y_3 & 0.9 & 0.5 & 0.8 \\ y_4 & 0.6 & 0.7 & 0.5 \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{llll} & z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & 0.6 & 0.8 & 0.5 \\ x_2 & 0 & 0.4 & 0 \\ x_3 & 0.7 & 0.9 & 0.7 \end{array}\right).$$

Композицию соответствий можно рассматривать как произведение матриц, задающих соответствия. Только вместо операции умножения при этом используется операция взятия T-нормы, а вместо операции сложения используется операция взятия максимума. ■

В ряде работ, например в [39], рассматриваются и другие виды композиций.

Определение 1.33. Пусть на $X \times Y$ и $Y \times Z$ заданы нечеткие соответствия $R = \{((u,v), \mu_R(u,v))\}$ и $S = \{((v,w), \mu_S(v,w))\}$. Подкомпозицией соответствий называется нечеткое соответствие $R \triangleleft S = \{((u,w), \mu_{R\triangleleft S}(u,w))\}$, заданное на $X \times Z$.

$$\mu_{R\triangleleft S}(u,w) = \inf_{v \in Y} I\{\mu_R(u,v), \mu_S(v,w)\},$$

где I — импликатор.

Пример 1.24.

$$R = \left(\begin{array}{cccc} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & 0.4 & 0 & 0.9 \\ x_2 & 1 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0.2 & 0 & 0.6 \end{array}\right), \qquad S = \left(\begin{array}{cccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ y_2 & 0 & 0 & 0 \\ y_3 & 0.8 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

В качестве импликатора будем использовать импликатор Клина-Дайнеса $I(x,y) = \max(1-x, y)$. Подкомпозицией $R \triangleleft S$ будет являться соответствие

$$R \triangleleft S = \left(\begin{array}{cccc} & z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & 0.6 & 0.1 & 0.6 \\ x_2 & 0.4 & 0.5 & 0 \\ x_3 & 1 & 1 & 1 \\ x_4 & 0.8 & 0.4 & 0.8 \end{array}\right).$$

■

В дальнейшем под композицией будем понимать различные типы композиций: sup-T, inf-I, inf-C и т.д. и использовать для их обозначения символ $\circ$. При необходимости будет уточняться, какой конкретно вид композиции используется.

1.4. Нечеткие числа

На практике часто возникают ситуации, когда для характеристики численного значения величины приходится использовать обороты «около», «больше», «много меньше» и т. п. Подобные характеристики являются примерами так называемых нечетких чисел. Использование нечетких чисел позволяет приблизить процесс формализации ситуации к процессу человеческого мышления. В [3,16] можно найти основы теории нечетких чисел.

Используя теорию нечетких множеств, можно представить нечеткое число как нечеткое подмножество множества действительных чисел. Также теорию нечетких чисел рассматривают как расширение теории интервалов достоверности, когда эти интервалы рассматриваются при всех уровнях от 0 до 1 вместо рассмотрения одного из них.

1.4.1. Основные определения

Определение 1.34. *Нечетким числом* называется нечеткое подмножество универсального множества действительных чисел $\mathbb{R}$, функция принадлежности μ которого удовлетворяет условиям

1. Непрерывности.
2. Нормальности: $\sup\limits_{x \in R}\{\mu(x)\} = 1$.
3. Выпуклости: $\mu(x_j) \geqslant \min\{\mu(x_i), \mu(x_k)\}, x_i \leqslant x_j \leqslant x_k$.

Множество всех нечетких чисел будем обозначать $\mathcal{F}$. На рис 1.15 приведен пример графика функции принадлежности нечеткого числа.

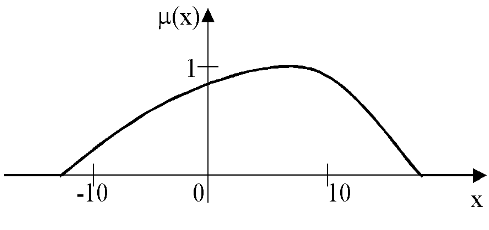


Рис. 1.15. Нечеткое число

Определение 1.35. *Носителем* нечеткого числа A называется носитель соответствующего нечеткого множества; обозначается $supp(A)$.

Определение 1.36. *Квазинечетким числом* называется нечеткое число, для которого

$$\lim_{x \to -\infty} \mu(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \mu(x) = 0.$$

Определение 1.37. *Треугольным нечетким числом* (рис. 1.16) с центром a, правой шириной $\gamma > 0$ и левой шириной $\delta > 0$ называется нечеткое множество, функция принадлежности которого имеет вид

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a-x}{\gamma}, & \text{если } a-\gamma \leqslant x \leqslant a; \\ 1 - \dfrac{x-a}{\delta}, & \text{если } a \leqslant x \leqslant a+\delta; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1.1}$$

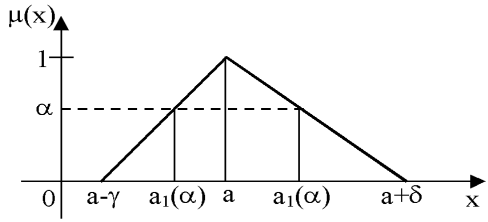


Рис. 1.16. Треугольное нечеткое число

Встречаются различные обозначения треугольных нечетких чисел: $(a-\gamma, a, a+\delta)$ или (a, γ, δ). Мы будем использовать последнее.

Треугольное число с центром a соответствует нечеткому множеству чисел, приблизительно равных a, степень этого «приблизительно» определяется величинами γ и δ. Носителем будет интервал $(a-\gamma, a+\delta)$.

Определение 1.38. *Трапециевидным нечетким числом* (рис. 1.17) с интервалом устойчивости $[a, b]$, правой шириной $\gamma > 0$ и левой шириной $\delta > 0$ называется нечеткое множество, функция принадлежности которого имеет вид

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{a-x}{\gamma}, & \text{если } a-\gamma \leqslant x \leqslant a; \\ 1, & \text{если } a \leqslant x \leqslant b; \\ 1 - \dfrac{x-b}{\delta}, & \text{если } b \leqslant x \leqslant b+\delta; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1.2}$$

Будем обозначать трапециевидные нечеткие числа (a, b, γ, δ).

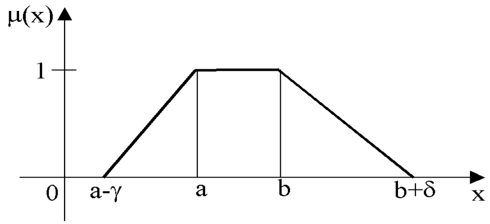


Рис. 1.17. Трапециевидное нечеткое число

Трапециевидное число с интервалом устойчивости $[a, b]$ соответствует нечеткому множеству чисел, приблизительно находящихся в интервале $[a, b]$. Носителем будет интервал $(a - \gamma, b + \delta)$.

Вообще, можно задать нечеткое число в общем виде, т.к. функция принадлежности соответствующего нечеткого множества может быть задана как

$$\begin{cases} L\left(\dfrac{a-x}{\gamma}\right), & \text{если } a-\gamma \leqslant x \leqslant a; \\ 1, & \text{если } a \leqslant x \leqslant b; \\ R\left(\dfrac{x-b}{\delta}\right), & \text{если } b \leqslant x \leqslant b+\delta; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{1.3}$$

где $[a, b]$ называется *пиком (ядром)* числа A,

$$L : [0,1] \to [0,1] \quad \text{и} \quad R : [0,1] \to [0,1]$$

непрерывные и невозрастающие заданные функции, для которых имеют место равенства $L(0) = R(0) = 1$ и $L(1) = R(1) = 0$. Нечеткие числа, заданные подобным образом, называются нечеткими числами типа LR и обозначаются $A = (a, b, \gamma, \delta)_{LR}$. Носителем LR-чисел является интервал $(a - \gamma, b + \delta)$.

В качестве функций L и R можно выбрать инвертор. Если, например, $R(x) = L(x) = 1 - x$, то нечеткое LR-число с функцией принадлежности (1.3) есть нечеткое трапециевидное число с функцией принадлежности (1.2).

1.4.2. Операции над нечеткими числами

Существует два основных способа введения операций над нечеткими числами: с использованием понятия α-сечения [16] или при помощи *принципа расширения (extension principle)* [14], предложенного Заде.

Определение 1.39. *α-сечением (α-уровнем, срезом)* $[A]^\alpha$ нечеткого числа $A \in \mathcal{F}$ называется множество

$$[A]^\alpha = \begin{cases} \{t \in R \mid \mu(t) \geqslant \alpha\}, & \text{если } \alpha > 0; \\ \overline{supp(A)}, & \text{если } \alpha = 0,, \end{cases}$$

где $\overline{supp(A)}$ — замыкание носителя нечеткого подмножества, т.е. при $supp(A) = (a, b)$ нулевым уровнем будет $[a, b]$.

Если обозначить $a_1(\alpha) = \min[A]^\alpha$ и $a_2(\alpha) = \max[A]^\alpha$, то $[A]^\alpha$ представляет собой отрезок $[a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$. Для $A = (a, \gamma, \delta)$

$$[A]^\alpha = [a - (1 - \alpha)\gamma, a + (1 - \alpha)\delta], \forall\gamma \in [0, 1], \tag{1.4}$$

а для $A = (a, b, \gamma, \delta)$

$$[A]^\alpha = [a - (1 - \alpha)\gamma, b + (1 - \alpha)\delta], \forall\gamma \in [0, 1]. \tag{1.5}$$

Кроме того, легко видеть, что при $\alpha \leqslant \beta$ справедливо включение $[A]^\beta \subset [A]^\alpha$.

При различных значениях α сечениям $[A]^\alpha$ соответствуют сегменты действительной оси $\Delta_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$. Часто нечеткое число приближенно представляют в виде набора α-сечений при заданном наборе значений $\{\alpha\}$. Например, нечеткое число A на рис. 1.18 можно записать как:

$$\begin{aligned} [A]^0 &= [4\ ,40], \\ [A]^{0.2} &= [5\ ,38], \\ [A]^{0.4} &= [7\ ,36], \\ [A]^{0.6} &= [12,34], \\ [A]^{0.8} &= [16,30], \\ [A]^1 &= [22,22]. \end{aligned}$$

Понятие α-уровня соответствует понятию интервала достоверности. Операции над нечеткими числами осуществляются последовательно уровень за уровнем, аналогично выполнению операций над этими интервалами. Сложение, вычитание, умножение и деление интервалов выполняются по следующим правилам:

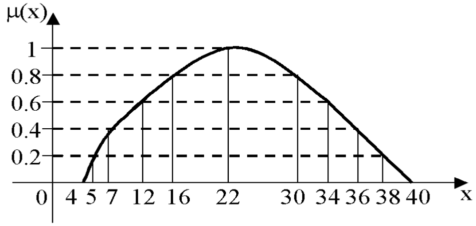


Рис. 1.18. α-уровни нечеткого числа

[a,b] (+) [c,d]= [a+b,c+d],
[a,b] (−) [c,d]= [a-d,b-c],
[a,b] ($\cdot$) [c,d]= $[a \cdot c, b \cdot d]$,
[a,b] (:) [c,d]= [a:d,b:c].

Операции над треугольными и трапециевидными нечеткими числами выполняются как операции над α-сечениями, заданными в виде (1.4) и (1.5) по правилам для интервалов достоверности. Пусть $A_1 = (c_1, \gamma_1, \delta_1)$ и $A_2 = (c_2, \gamma_2, \delta_2)$ — два треугольных нечетких числа, тогда

$$[A_1]^\alpha \pm [A_2]^\alpha = [c_1 \pm c_2 - (1-\alpha)(\gamma_1 \pm \gamma_2), c_1 \pm c_2 + (1-\alpha)(\delta_1 \pm \delta_2)],$$

$$[A_1]^\alpha \cdot [A_2]^\alpha = [c_1c_2 - (1-\alpha)(c_1\gamma_2 + c_2\gamma_1) + \\ + (1-\alpha)^2\gamma_1\gamma_2, c_1c_2 + (1-\alpha)(c_1\delta_2 + c_2\delta_1) + (1-\alpha)^2\delta_1\delta_2],$$

$$[A_1]^\alpha : [A_2]^\alpha = \left[\frac{c_1 - (1-\alpha)\gamma_1}{c_2 + (1-\alpha)\delta_2}, \ \frac{c_1 + (1-\alpha)\delta_1}{c_2 - (1-\alpha)\gamma_2}\right].$$

Центром нечеткого числа, получающегося при выполнении данных операций, будет интервал при $\alpha = 1$, левая и правая ширины находятся как расстояние от этого значения до левого и правого концов интервалов при $\alpha = 0$ соответственно:

$$A_1 \pm A_2 = (c_1 \pm c_2, \gamma_1 \pm \gamma_2, \delta_1 \pm \delta_2),$$

$$A_1 \cdot A_2 = (c_1c_2, c_1\gamma_2 + c_2\gamma_1 - \gamma_1\gamma_2, c_1\delta_2 + c_2\delta_1 + \delta_1\delta_2)_{LR},$$

$$A_1 : A_2 = \left(\frac{c_1}{c_2}, \ \frac{c_1\delta_2 + c_2\gamma_1}{c_2(c_2+\delta_2)}, \ \frac{c_1\gamma_2 - c_2\delta_1}{c_2(c_2-\gamma_2)}\right)_{LR}.$$

Несложно вывести подобные правила для суммы, разности, произведения и частного трапециевидных чисел.

Значения правого и левого концов α-сечений суммы и разности треугольных и трапециевидных нечетких чисел пропорциональны α, значения концов произведения пропорциональны α^2, частного — α^{-1}. Поэтому, в общем случае, произведение и частное являются LR-нечеткими числами, сумма и разность остаются обычными треугольными и трапециевидными.

Принцип расширения [14] представляет общий метод расширения обычных (четких) математических функций на случай работы с нечеткими числами.

Определение 1.40. Пусть $X_i, i = \overline{1,n}$ и Y — четкие множества, $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ — декартово произведение множеств, $A_i, i = \overline{1,n}$, и B — нечеткие подмножества множеств $X_i, i = \overline{1,n}$ и Y соответственно. Если $f : X \to Y$ — обычная (четкая) функция, то нечеткая функция $B = \hat{f}(A_1, \ldots, A_n)$ определяется как

$$B = \{(y, \mu_B(y)) \mid y = f(x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n) \in X\},$$

где

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\in f^{-1}(y)} \min\{\mu_{A_1}(x_1), \ldots, \mu_{A_n}(x_n)\}, & f^{-1}(y) \neq \varnothing; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В данном случае операции над нечеткими числами представляют собой операции над функциями принадлежности. Пусть $A \in \mathcal{F}$, f — унарная функция. Согласно принципу расширения $f(A)$ определяется как совокупность пар $\{(x, \mu_{f(A)(x)})\}$, где $x \in supp(A)$ и

$$\mu_{f(A)}(x) = \begin{cases} \mu_A(f^{-1}(x)), & \text{если } f \text{ — инъекция;} \\ 0, & \text{если } f^{-1}(x) = \varnothing; \\ \sup_{x=f(a)} \mu_A(a), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{1.6}$$

Если g — бинарная операция, $A, B \in \mathcal{F}$, то, согласно принципу расширения, $g(A, B) = \{(x, \mu_{g(A,B)}(x))\}$, где $x = g(a, b)$, $a \in supp(A)$, $b \in supp(B)$ и

$$\mu_{g(A,B)}(x) = \sup_{x=g(a,b), a\in supp(A), b\in supp(B)} \min\{\mu_A(a), \mu_B(b)\}. \tag{1.7}$$

Приведем примеры вычисления функций принадлежности для унарных операций по правилу (1.6):

- $-A$ (противоположное число): $\mu_A(-x)$;
- λA (умножение на число): $\mu_A(x/\lambda), \lambda \neq 0$;
- A^p (возведение в степень): $\mu_A(x^{1/p}), p \neq 0$.

Вычисление функций принадлежности в случае бинарных операций по правилу (1.7) производится следующим образом:

- Сложение: $\mu_{A\oplus B}(x) = \sup\limits_{a\in\mathbb{R}} \{\min\{\mu_A(a), \mu_B(x-a)\}\}$.
- Вычитание: $\mu_{A\ominus B}(x) = \sup\limits_{a\in\mathbb{R}} \{\min\{\mu_A(x+a), \mu_B(a)\}\}$.
- Умножение:

$$\mu_{A\otimes B}(x) = \begin{cases} \sup\limits_{a\in(\mathbb{R}/(0))} \{\min\{\mu_A(a), \mu_B(x/a)\}\}, & \text{если } x \neq 0; \\ \max\{\mu_A(0), \mu_B(0)\}, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

- Деление: $\mu_{A\div B}(x) = \sup\limits_{a\in\mathbb{R}} \{\min\{\mu_A(a\cdot x), \mu_B(a)\}\}$.

Так как произведение двух треугольных чисел не будет треугольным числом, то в приложениях, например в нечетких нейронных системах, используется линейная аппроксимация произведения нечетких чисел по принципу расширения. В этом случае $B = A_1 \hat{\cdot} A_2 = (m_1 m_2, \alpha, \beta)$, где

$$\alpha = m - \min\{l_1 \cdot l_2, l_1 \cdot r_2, r_1 \cdot l_2, r_1 \cdot r_2\},$$

$$\alpha = \max\{l_1 \cdot l_2, l_1 \cdot r_2, r_1 \cdot l_2, r_1 \cdot r_2\} - m.$$

Здесь $l = m - \alpha$ и $r = \beta - m$ — левая и правая ширины нечеткого числа.

Треугольные нечеткие числа позволяют довольно точно формализовать большое количество ситуаций при прогнозировании значений определенных величин, когда статистические методы не применимы в данной ситуации и/или не требуется большая точность. Нечеткие числа в целом позволяют оценить значение величины или возможность определенного события с количественной точки зрения. Применение нечетких чисел в различных областях производства и экономики описано в [3, 16].

2. Приложения нечеткой логики

2.1. Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности

Многочисленные исследования показывают, что лица, принимающие решения (ЛПР) без дополнительной аналитической поддержки, используют упрощенные, а иногда и противоречивые решающие правила. Поддержка принятия решения требуется во всех без исключения областях прикладной деятельности человека, что связано с увеличивающимся объемом информации, необходимостью учитывать большое количество противоречивых факторов, объективных и субъективных составляющих при принятии решений.

При разработке систем поддержки принятия решений возникает проблема выбора адекватных математических моделей, позволяющих отражать структуру сложной системы, для которой принимается решение, оперировать субъективными оценками экспертов, принимать во внимание вербальный характер оценки специалистами вариантов решения проблемы, учитывать неясность, неточность данных средствами нечеткой логики [8, 10, 20, 28, 30, 32, 33, 35].

2.1.1. Классификация моделей и методов принятия решений

Модель задачи принятия решений (ЗПР) в [9] представляется в виде: $< t, X, R, A, F, G, D >$, где t — постановка задачи (например, выбрать одну наилучшую в некотором смысле альтернативу или упорядочить все множество альтернатив); X — множество допустимых альтернатив; R — множество критериев оценки степени достижения поставленных целей; A — множество шкал измерения по критериям (шкалы наименований, порядковые, интервальные, отношений); F — отображение множества допустимых альтернатив в множество критериальных оценок; G — система предпочтений решающего элемента; D — решающее правило, отражающее систему предпочтений.

Классификация моделей задач принятия решений проводится в соответствии со следующими признаками:

1) по виду отображения F — детерминированное, вероятностное или неопределенное, можно выделить соответственно: ЗПР в условиях определенности, ЗПР в условиях риска, ЗПР в условиях неопределенности.

2) по мощности множества R — одноэлементное множество или состоящее из нескольких критериев, выделяются соответственно: ЗПР со

скалярным критерием, ЗПР с векторным критерием (многокритериальные задачи);

3) по типу системы G — отражает предпочтения одного лица или коллектива в целом, выделяются задачи индивидуального принятия решения (ПР), задачи группового ПР.

В [4] при определении модели ПР предполагается, что рассматривается некоторое множество исходных структур предпочтений и исследуется определенная ЗПР, процесс решения которой понимается как оптимальный выбор метода обработки исходной структуры из некоторого базового класса методов. При этом можно считать, что на множестве исходных структур задана модель решения поставленной ЗПР, если указан некий принцип или правило, согласно которому произвольному отношению ставится в соответствие некоторый набор методов. Конкретные модели ориентированы на соответствие тех или иных методов принятия решений определенным базовым структурам.

На рис. 2.19 приведена классификация методов ПР по таким признакам, как содержание экспертной информации, тип получаемой информации, на основе которой можно определить группу методов ПР в условиях неопределенности.

При исследовании экономических, социальных и других систем, в функционировании которых участвует человек, значительное количество информации может быть получено от людей, имеющих опыт работы с данной системой и знающих ее особенности, от людей, имеющих представление о целях функционирования системы. Эта информация носит субъективный характер, и ее представление в естественном языке содержит неопределенности, которые не имеют аналогов в языке традиционной математики. В этом случае лучше рассматривать задачи оптимального управления с позиций методов, учитывающих неопределенность описания модели исследуемого объекта. При этом под неопределенностью будем понимать явления, не поддающиеся анализу и измерению со сколь угодно большой точностью.

2.1.2. Модели линейного упорядочивания

Используемые в практике модели линейного упорядочивания традиционно разделяются на две большие группы, различающиеся своим подходом к решению задачи упорядочивания объектов [4].

В *моделях первой группы*, использующих *статистические методы*, каждому объекту x_i сопоставляется определенный интегральный показатель π_i, оценивающий итоги его сравнений с остальными объектами,

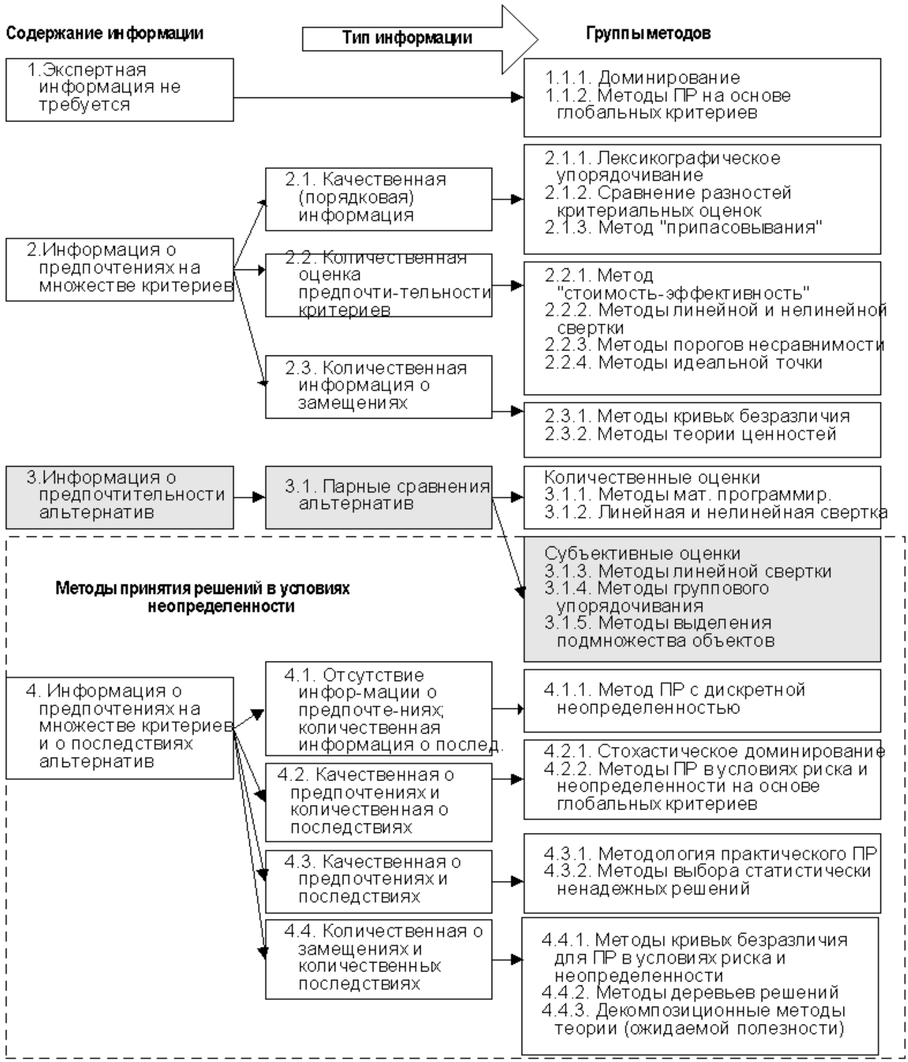


Рис. 2.19. Классификация методов ПР на основе содержания экспертной информации

а далее объекты просто упорядочиваются по убыванию значений этого ранжирующего фактора. В *моделях второй группы*, использующих *комбинаторно-логические и теоретико-графовые методы*, оцениваются показатели не отдельных объектов, а всего упорядочивания в целом, и выбирается упорядочивание, максимизирующее некоторый функционал качества. Оценок важности при этом не делается. Рассмотрим некоторые модели первой группы.

Пусть задано некоторое фиксированное множество объектов $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, которые сравниваются попарно с точки зрения их предпочтительности, желательности, важности и т.п., а результаты записываются в виде матрицы парных сравнений $A = ||a_{ij}||_{n \times n}$, отражающей возникающее бинарное отношение предпочтения/безразличия на множестве X. Симметричные элементы матрицы парных сравнений a_{ij} и a_{ji} должны выбираться равными, если соответствующие объекты равноценны или несравнимы ($x_i \sim x_j$); если же $x_i > x_j$, то должно быть $a_{ij} > a_{ji}$. Кроме того, на элементы матрицы A обычно накладываются дополнительные калибровочные ограничения , однозначно связывающие попарно симметричные элементы a_{ij}, a_{ji}. Приведем основные типы калибровок.

1. Простая структура (ПС).

$$\forall i, j, i \neq j \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i > x_j; \\ 0, & \text{если } x_j > x_i; \\ 1/2, & \text{если } x_i \sim x_j. \end{cases}$$

Интерпретация: a_{ij} - индикатор факта превосходства одного объекта над другим или их равноценности (несравнимости).

2. Турнирная калибровка (Т).

$$\forall i, j \qquad a_{ij} \geqslant 0; a_{ij} + a_{ji} = c.$$

Интерпретация: a_{ij} — число очков, набранных игроком x_i во всех встречах с игроком x_j; число $c = const$ при этом может интерпретироваться как количество таких встреч. Нередко дополнительно постулируется целочисленность матрицы.

3. Кососимметрическая калибровка (К).

$$\forall i, j \qquad a_{ij} + a_{ji} = 0.$$

Интерпретация: объект x_i превосходит в сравнении объект x_j на a_{ij}.

4. Степенная калибровка (С).

$$\forall i, j \qquad a_{ij} > 0; a_{ij} \cdot a_{ji} = 1.$$

Интерпретация: объект x_i превосходит в парном сравнении объект x_j в a_{ij} раз.

5. Вероятностная калибровка (В).

$$\forall i, j \qquad 0 \leqslant a_{ij} \leqslant 1; a_{ij} + a_{ji} = 1.$$

Интерпретация: a_{ij} — вероятность превосходства x_i над x_j.

Помимо приведенных калибровок для полноты анализа можно ввести еще и произвольную взвешенную структуру (ВС), в рамках которой предполагается обычно только неотрицательность матрицы A, сами же ее элементы могут интерпретироваться по-разному.

Переход от матрицы A, заданной в некоторой калибровке, к откалиброванной по-иному матрице B возможен не всегда, но лишь при соблюдении некоторых дополнительных содержательных условий и нередко сопряжен с потерей важной информации. Вопрос о возможности перехода к матрице с другой калибровкой и о путях такого перехода всякий раз должен рассматриваться с учетом содержательных особенностей задачи. Схемы и направления подобных переходов приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1.

Преобразование калибровок

Тип перехода	Возможные способы реализации
ВС→ Т	$b_{ij} = a_{ij} + (\max\limits_{i,j} s_{ij} - s_{ij})/2;$ $b_{ij} = (a_{ij} \cdot \max\limits_{i,j} s_{ij})/s_{ij}; \quad s_{ij} = a_{ij} + a_{ji};$
Т→ К	$b_{ij} = a_{ij} - a_{ji}; b_{ij} = (a_{ij} - a_{ji})/2;$
К→ Т	$b_{ij} = a_{ij}(signa_{ij} + 1)/2 + (\max\limits_{i,j} -\|a_{ij}\|)/2;$ $b_{ij} = c(a_{ij} + \max\limits_{i,j} a_{ij}); \quad c > 0;$
К→ С	$b_{ij} = r^{a_{ij}}; \quad r > 1;$
С→ К	$b_{ij} = \log_r a_{ij}; \quad r > 1;$
В, Т→ С	$b_{ij} = a_{ij}/a_{ji};$
С→ В, Т	$b_{ij} = a_{ij}/(1 + a_{ji});$
Т→ В	$b_{ij} = a_{ij}/(a_{ij} + a_{ji});$
В→ Т	$b_{ij} = c \cdot a_{ij}; \quad c > 0;$
ВС, Т, В, К, С→ ПС	$b_{ij} = [sign(a_{ij} - a_{ji}) + 1]/2.$

Каждая из моделей линейного упорядочивания требует для матриц парных сравнений определенных калибровочных ограничений.

1. *Модели спортивного типа*: $\forall i = \overline{1, n} \quad s_j = \sum\limits_{i \neq j} a_{ij}$. Такое название

исторически укоренилось за целой группой сходных моделей, в которых в качестве ранжирующего фактора используется набранная объектом «сумма очков». Обрабатываемая матрица A может иметь калибровку типа T, ПС или K (таблица 2.2).

Таблица 2.2.

Модели спортивного типа

<table>
<tr><td>Название модели ПР</td><td>Математическая модель</td><td>Положительные характеристики</td><td>Недостатки модели</td></tr>
<tr><td>Турнирная модель</td><td>Объекты упорядочиваются по убыванию s_i.</td><td rowspan="2">Простота получения результата. Выполняются свойства «Инвариантность к сдвигу», «Инвариантность к растяжению», «Положительная реакция».</td><td rowspan="2">Вычисление количественных оценок модель не предполагает.</td></tr>
<tr><td>Модель последовательного вычленения лидеров</td><td>В качестве лучшего (лидера) выбирается объект с $\max\limits_i s_i$, вычеркивается i-я строка и i-й столбец, вновь выбирается лидер и т.д.</td></tr>
<tr><td>Модель последовательной дихотомии</td><td>Множество X разбивается на два слоя — слой с большими s_i и слой с меньшими s_i и т.д. делится каждый слой.</td><td>Простота получения результата.</td><td>Не обладает свойствами «Устойчивость в малом», «Положительная реакция».</td></tr>
</table>

2. *Модель интегральной степени превосходства* является близкой к моделям спортивного типа; применяется для кососимметрических матриц. Вводится понятие интегральной степени превосходства

$$\tilde{\Phi}(x_i, x_j) = \sum_{t=1}^{n} \lambda_t (a_{it} - a_{jt})$$

, оценивающей превосходство x_i над x_j в сравнении с прочими объектами. Когда интегральная степень превосходства задана, ее можно представить в виде $\tilde{\Phi}(x_i, x_j) = f(x_i) - f(x_j)$, при этом $\forall i \quad f(x_i) =$

$\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j \tilde{\Phi}(x_i, x_j)$, где f — функция полезности на X, и объекты предлагается упорядочивать по убыванию ее значений.

К недостаткам модели можно отнести введение весов объектов — коэффициентов λ_t, — однако таких весов заранее задано быть не может. Модель сводится к турнирной и самостоятельного интереса не имеет.

3. *Модель функции доминируемости* ориентирована на обработку нечетких отношений предпочтения, т.е. $a_{ij} \in [0, 1]$. Применяется для калибровок T, K. Функция доминируемости $l(x_i) = \max\limits_{j \neq i} a_{ij}$ характеризует максимальную силу, с которой объект x_i доминируется остальными объектами множества X. При $l(x_i) = 0$ — абсолютно не доминируется, при $l(x_i) = 1$ — абсолютно доминируется, при $0 < l(x_i) < 1$ — слабо доминируется. Объекты упорядочиваются по убыванию соответствующих значений функции $m(x_i) = 1 - l(x_i)$. В [28] используются другие способы получения $l(x_i)$. *Возможно использование значений в качестве количественных оценок важности объектов*. Модель обладает свойствами «устойчивость в малом», «положительная реакция», «инвариантность к сдвигу», «инвариантность к растяжению».

4. *Модель Брэдли-Терри* пригодна для простых структур без равноценных элементов и целочисленных турнирных матриц.

Каждому объекту сопоставляется его «сила» π_i, причем предполагается, что вероятность превосходства в парном сравнении $P(x_i > x_j)$ прямо пропорциональна π_i: $P(x_i > x_j) = \pi_i/(\pi_i + \pi_j) = 1 - P(x_j > x_i)$. Для каждой пары (i, j) проводится k независимых актов парных сравнений. Окончательно получается:

$$\begin{cases} s_i/\pi_i = k \sum\limits_{j=1}^{n} (\pi_i + \pi_j)^{-1}, \quad i = \overline{1, n}; \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \pi_i = 1. \end{cases}$$

Система может быть решена итерационно. После вычисления всех π_i объекты упорядочиваются по их убыванию.

Получаемые компоненты нормализованного вектора π могут служить количественными оценками важности объектов. Выполняются свойства «инвариантность к сдвигу», «инвариантность к растяжению».

5. *Модель Бэржа-Брука-Буркова* применяется для обработки простых структур, матриц с турнирной и степенной калибровками.

Каждому объекту x_i ставится в соответствие цепочка так называемых интегрированных сил, в которой сила k-го порядка p_i^k определяется как сумма элементов i-й строки в матрице A^k :

$$p_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k, \quad ||a_{ij}^k||_{n\times n} = A^k; \quad \forall i = \overline{1,n}, k = 1,2,\ldots$$

При $k \to \infty$ имеет место $\lim_{k\to\infty}(p_i^k / \sum\limits_i p_i^k) = \pi, \quad i = \overline{1,n}$, где нормализованный собственный вектор $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ матрицы A отвечает максимальному по модулю собственному числу теоремы Перрона-Фробениуса. Модель обладает свойствами: «инвариантность к растяжению», «устойчивость в малом», «транспонируемость» (при $a_{ii} = 1$). Получаемые значения компонент собств. вектора могут служить оценкой важности объектов.

6. *Стохастическая модель Ушакова* предложена для обработки матриц, заданных в степенной и вероятностной калибровках. Матрица A преобразуется в вероятностную матрицу P, где p_{ij} — вероятность превосходства x_j над x_i. При вероятностной калибровке $P = A^T$.

При степенной калибровке $p_{ij} = a_{ji}/(1 + a_{ji})^{-1}, \quad i \neq j$.

Строится стохастическая матрица $\tilde{P} = ||\tilde{p}_{ij}||_{n\times n}$.

$$\tilde{p}_{ij} = 1 - \sum i \neq j \tilde{p}_{ij}, \quad i,j = \overline{1,n}, \quad \tilde{p}_{ij} = p_{ij}/(n-1), \quad i \neq j;$$

$$p_i = \triangle_{ij} / \sum i = j^n \triangle_{ij}, \quad i,j = \overline{1,n},$$

где $\triangle_{ij}$ — минор получаемый из $det(E - \tilde{P})$ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Упорядочивание x_i производится по p_i. Обладает свойствами «устойчивость в малом», «положительная реакция». Получаемые компоненты финального распределения могут использоваться в качестве количественных оценок важности объектов.

Не обладает свойствами «инвариантность к растяжению», «инвариантность к сдвигу».

7. *Модель равномерного сглаживания* применяется для положительных матриц с турнирной или степенной калибровкой. По аксиоме Льюса для калибровки Т имеет место: $\forall i,j \quad \pi_i/\pi_j = a_{ij}/a_{ji}$ и при этом

$$\pi_i = \pi_i / \sum_{j=1}^{n} \pi_j = \left(\sum_{j=1}^{n} \pi_j/\pi_i \right)^{-1} = \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \right)^{-1}.$$

Обозначая $\forall i,j \quad z_{ij} = \ln b_{ij}$, получаем $\forall i,j \quad z_{ij} = z_{ik} + z_{kj}$, так что матрица $Z = ||z_{ij}||_{n\times n}$ может быть восстановлена по любой строке.

В данной модели от исходной матрицы A необходимо перейти к матрице Z и построить n различных матриц $Z^{(1)}, \ldots, Z^{(n)}$, полагая, что матрица $Z^{(k)}$ порождается k-й строкой матрицы Z по ранее приведенной формуле. $\overline{Z} = (1/n)\sum\limits_{i} Z_i^{(i)}$, причем $\forall i, j \quad z_{ij} = (1/n)\sum\limits_{k=1}^{n}(z_{ik} + z_{kj})$. Проделав преобразования $\forall i, j \quad \overline{b}_{ij} = \exp \overline{z}_{ij}, \quad \overline{a}_{ij} = c\overline{b}_{ij}(1 + \overline{b}_{ij})^{-1}$, в итоге получим $\pi_i = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \overline{b}_{ij}\right)^{-1}$.

Обладает свойствами «инвариантность к растяжению», «транспонируемость», «устойчивость в малом», «положительная реакция». Получаемые коэффициенты можно использовать для количественной оценки важности объектов.

Выбор модели упорядочивания с теми свойствами, которые особенно желательны в данном конкретном случае, представляется весьма полезным в системах поддержки принятия решений. Модели типа: модель функции доминируемости, Брэдли-Терри, Бержа-Брука-Буркова, стохастическая модель Ушакова, модель равномерного сглаживания предлагают гораздо более убедительные доводы в пользу соответствующих оптимальных упорядочиваний. Модель Брэдли-Терри пригодна для простых структур и целочисленных турнирных матриц, которые не учитывают неточность, неопределенность в оценках экспертов. Стохастическая модель Ушакова скорее ориентирована на вероятностный класс неопределенностей, в отличие от нее модель Бержа-Брука-Буркова и модель функции доминируемости позволяют учитывать неопределенность явлений, не поддающихся измерению со сколь угодно большой точностью и с учетом нечеткости соответственно. Модель равномерного сглаживания не обладает свойством «инвариантность к сдвигу», что не позволяет экспертам производить неполные сравнения. В [4] утверждается, что модель Бержа-Брука-Буркова также не обладает свойством «инвариантность к сдвигу», однако в [30] указан подход к выявлению приоритетов для неполной матрицы на основе данной модели. Таким образом, для линейного упорядочивания в условиях неопределенности предпочтительнее пользоваться моделями функции доминируемости и Бержа-Брука-Буркова. Рассмотрим методы ПР, ориентированные на выделенные модели.

2.1.3. Метод анализа иерархий

При принятии управленческих решений и прогнозировании возможных результатов лицо, принимающее решение, обычно сталкивается со

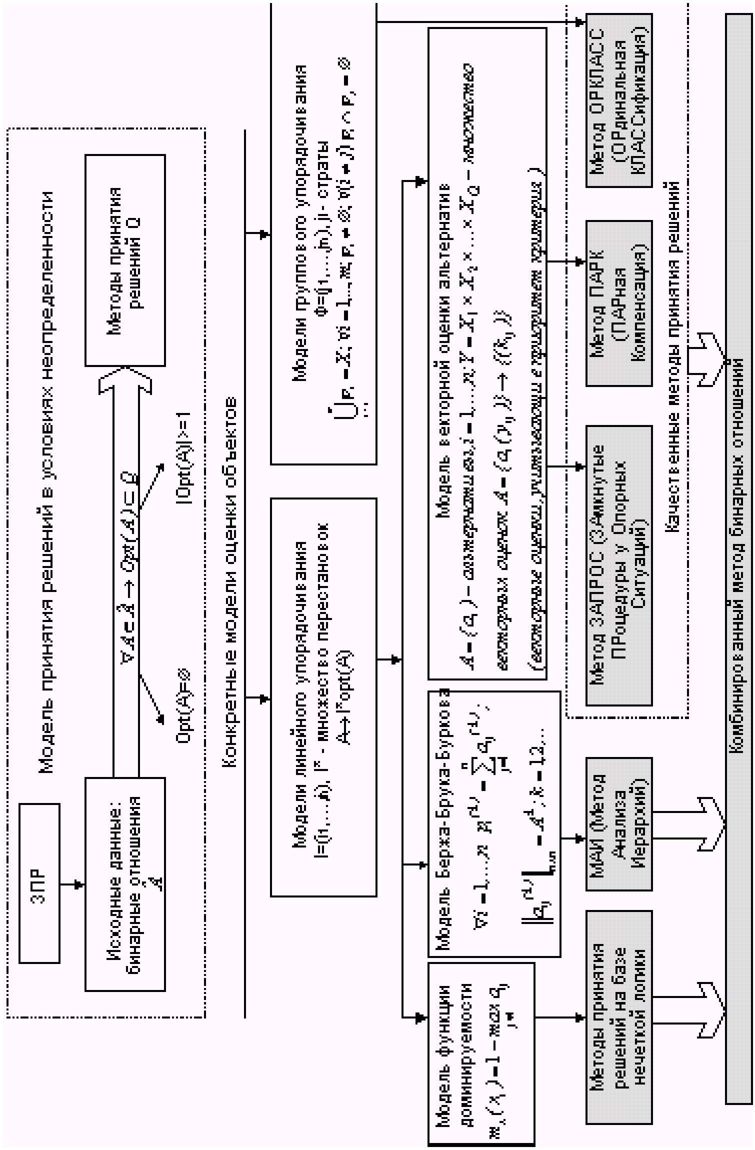


Рис. 2.20. Классификация моделей ПР в условиях неопределенности

сложной системой взаимозависимых компонент (ресурсы, желаемые исходы или цели, лица или группа лиц и т.д.), которую нужно проанализировать [30]. Метод анализа иерархий (МАИ) развивает модель Буржа-Брука-Буркова [4]. Принимая решение, группа экспертов производит декомпозицию сложной проблемы — определяет ее компоненты и отношения между ними. Получается модель реальной действительности, построенная в виде иерархии. Вершина иерархии — общая цель, далее располагаются подцели, затем силы, которые влияют на эти подцели, люди, их цели, политики, стратегии, и, наконец, исходы, являющиеся результатами стратегий. На следующем этапе решения сравниваются уже отдельные компоненты иерархии между собой. В результате может быть выражена относительная степень интенсивности взаимодействия элементов в иерархии. Затем эти суждения выражаются численно. В завершении анализа проблемы МАИ включает процедуры синтеза множественных суждений, получения приоритетности критериев и нахождения альтернативных решений. Таким образом, основные этапы принятия решения с помощью МАИ следующие:

- построение иерархии рассматриваемой проблемы;
- парное сравнение компонент иерархии;
- математическая обработка полученных суждений.

В наиболее элементарном виде иерархия строится с вершины (с точки зрения управления — целей), через промежуточные уровни (критерии, от которых зависят последующие уровни) к самому низкому уровню (который обычно является перечнем альтернатив). Существуют несколько видов иерархий: доминантные, холлархии, китайский ящик и т.д. Наиболее часто применяется первый тип иерархий (таблица 2.3).

Парные сравнения проводятся в терминах доминирования одного из элементов над другим. Эти суждения затем выражаются в целых числах. Если элемент А доминирует над элементом Б, то ячейка матрицы, соответствующая строке А и столбцу Б, заполняется целым числом, а ячейка, соответствующая строке Б и столбцу А, заполняется обратным к нему числом (дробью). В МАИ предложена шкала относительной важности элементов иерархии.

Все матрицы в МАИ должны быть обратно симметричны, т.е. $a_{ij} = 1/a_{ji}$. По главной диагонали матрицы заранее ставятся единицы, т.к. альтернатива равноценна самой себе. Для заполнения каждой матрицы размером $n \times n$ достаточно произвести только $n(n-1)/2$ суждения. Составление таких матриц проводится для всех уровней и групп в иерархии. Причем полученные матрицы должны быть согласованы для достоверного решения. Согласованность проявляется в числовой (кардинальной согласованности) и транзитивной (порядковой согласованности). Согласованность матрицы можно проверить.

Таблица 2.3.

Шкала относительной важности МАИ

Интенсивность относительной важности	Определение
1	Равная важность
3	Умеренное превосходство одного над другим
5	Существенное или сильное превосходство
7	Значительное превосходство
9	Очень сильное превосходство
2,4,6,8	Промежуточные решения между двумя соседними суждениями
Обратные величины приведенных выше чисел	Если при сравнении одного параметра с другим получено одно из вышеуказанных чисел, то при сравнении второго параметра с первым получим обратную величину

Вычислять вектор приоритета (собственный вектор) для каждой матрицы парных сравнений можно разными способами [30]. В зависимости от выбранного способа в задаче может наблюдаться большая или меньшая погрешность. Наиболее обоснованный результат получается при применении теоремы Перрона-Фробениуса. На последнем этапе обработки полученные векторы приоритетов синтезируются, начиная со второго уровня вниз. Локальные приоритеты перемножаются на приоритет соответствующего критерия на вышестоящем уровне и суммируются по каждому элементу в соответствии с критериями, на которые воздействует этот элемент. Каждый элемент второго уровня умножается на единицу, т.е. на вес единственной цели самого верхнего уровня. Это дает составной, или глобальный, приоритет того элемента, который затем используется для взвешивания локальных приоритетов элементов, сравниваемых по отношению к нему как к критерию и расположенных уровнем ниже. Процедура продолжается до самого нижнего уровня.

2.1.4. Методы принятия решений при нечеткой исходной информации

В работе [28] рассматриваются методы принятия решений, основанные на парных сравнениях альтернатив, которые выражаются в виде нечетких отношений. Методы основаны на модели функции недоминируемости. В работе [8] произведена структуризация данных методов, в результате которой выделим следующие методы теории принятия решений при нечеткой исходной информации:

- методы принятия решений с одним экспертом;
- методы принятия решений с группой экспертов, характеризуемых весовыми коэффициентами;
- методы принятия решений с группой экспертов, характеризуемых нечетким отношением нестрогого предпочтения.

Задача принятия решения с одним экспертом

Задано множество $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ возможных решений или альтернатив и нечеткое отношение нестрогого предпочтения (н.о.п.) R на множестве U с функцией принадлежности $\mu_R(u_i, u_j) \in [0, 1]$ — любое рефлексивное нечеткое отношение на U, такое, что $\mu_R(u_i, u_i) = 1, u_i \in U$.

Н.о.п. задается обычно ЛПР в результате опроса экспертов, обладающих знаниями или представлениями о содержании или существе задачи, которые не были формализованы в силу чрезмерной сложности такой формализации или по другим причинам.

Для любой пары альтернатив $u_i,\ u_j \in U$ значение $\mu_R(u_i, u_j)$ понимается как степень предпочтения «u_i, не хуже u_j» в записи $u_i \geqslant u_j$. Равенство $\mu_R(u_i, u_j) = 0$ может означать как то, что $\mu_R(u_j, u_i) > 0$, то есть с положительной степенью выполнено «обратное» предпочтение $u_j \leqslant u_i$, так и то, что и $\mu_R(u_j, u_i) = 0$, то есть альтернативы u_j и u_i несравнимы. Рефлексивность н.о.п. отражает тот естественный факт, что любая альтернатива не хуже самой себя.

Задача принятия решения заключается в рациональном выборе наиболее предпочтительных альтернатив из множества U, на котором задано нечеткое отношение предпочтения R.

Алгоритм решения задачи

1. Строится нечеткое отношение строгого предпочтения R^S, ассоциированное с R, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_R^S(u_i, u_j) = \begin{cases} \mu_R(u_i, u_j) - \mu_R(u_j, u_i), & \mu_R(u_i, u_j) > \mu_R(u_j, u_i); \\ 0, & \mu_R(u_i, u_j) \leqslant \mu_R(u_j, u_i). \end{cases}$$

Это отношение может быть представлено в виде $R^S = R/R^T$, где R^T — «обратное» отношение (матрица отношений R^T получается транспонированием матрицы отношений R).

2. Строится нечеткое подмножество $U_R^{nd} \subset U$ недоминируемых альтернатив, ассоциированное с R и включающее те альтернативы, которые не доминируются никакими другими, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_R^{nd}(u_i) = \min_{u_j \in U}\{1 - \mu_R^S(u_j, u_i)\} = 1 - \max_{u_j \in U}\{\mu_R^S(u_j, u_i)\}, \quad u_i \in U.$$

Для любой альтернативы $u_j \in U$ значение $\mu_R^{nd}(u_i)$ понимается как степень недоминируемости этой альтернативы, то есть степень, с которой u_i не доминируется ни одной из альтернатив множества U; $\mu_R^{nd}(u_i) = \alpha$ означает, что никакая альтернатива u_j не может быть лучше u_i со степенью доминирования большей α; иначе говоря, u_i может доминироваться другими альтернативами, но со степенью не выше $1 - \alpha$. Рациональным естественно считать выбор альтернатив, имеющих по возможности большую степень принадлежности множеству U_R^{nd}.

3. Выбирается та альтернатива u^*, для которой значение $\mu_R^{nd}(u^*)$, максимально:

$$u^* = \arg\max_{u_i \in U} \mu_R^{nd}(u_i).$$

Она и дает решение задачи. Если наибольшую степень недоминируемости имеет не одна, а несколько альтернатив, то ЛПР может либо сам выбрать одну из них, исходя из каких-либо дополнительных соображений, либо расширить круг экспертов при формировании исходных данных задачи и повторить ее решение.

Пример 2.1. На множестве U из четырех альтернатив $U = \{u_1, \ldots, u_4\}$ задано отношение R матрицей M_R, тогда отношение R^S определяется матрицей M_R^S:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 1 & 1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_R^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для построения множества U_R^{nd} предварительно определяются максимальные элементы в столбцах матрицы M_R^S: $m = [1; 0.4; 0.3; 1]$. Множество U_R^{nd} определяется ветором $\mu_R^{nd} = [0; 0.6; 0.7; 0]$. Так как $\mu_R^{nd}(u_3) =$

$0.7 = \max \mu_R^{nd}(u_i)$, то $u^* = u_3$. Если же

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 1 & 0.6 & 0.9 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, M_R^S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$m = [0.4; 1; 1; 0.4]$, тогда $\nu_R^{nd} = [0.6, 0, 0, 0.6]$. В этом случае в качестве u^* может быть выбрана как альтернатива u_1, так и u_4.

■

Задача принятия решения с группой экспертов, характеризуемых весовыми коэффициентами

На множестве $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ всевозможных решений (альтернатив) задано несколько н.о.п. Нечеткие отношения нестрогого предпочтения R_k получены в результате опроса каждого эксперта и заполнении матрицы нечеткого отношения нестрогого предпочтения (н.о.п.) R_k, каждый элемент которой есть значение функции принадлежности $\mu_R(u_i, u_j)$, выражающее степень предпочтительности альтернативы u_i по сравнению с u_j.

При $\mu_R(u_i, u_j) > 0$ u_i предпочтительнее, чем u_j; если же $\mu_R(u_i, u_j) = 0$, то либо первая альтернатива хуже второй, либо они несравнимы.

Лицо, принимающее решение, по-разному относится к экспертам, что находит отражение в весовых коэффициентах λ_k, $0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1$, $\sum \lambda_k = 1$, соответствующих каждому из них.

Целью данной задачи является упорядочение совокупности альтернатив $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.

Алгоритм решения задачи

1. Строится свертка P отношений как пересечение нечетких отношений нестрогого предпочтения экспертов

$$P = \cap R_k(u_i, u_j) = \min\{\mu_{R_k}(u_i, u_j)\};$$

таким образом, получается новое нечеткое отношение нестрогого предпочтения.

Далее с н.о.п. ассоциируется отношение строгого предпочтения $P^S = P/P^T$ с функцией принадлежности μ_P^S.

$$\mu_P^S(u_i, u_j) = \begin{cases} \mu_P(u_i, u_j) - \mu_P^T(u_i, u_j), & \text{если } \mu_P(u_i, u_j) > \mu_P^T(u_i, u_j); \\ 0, & \text{если } \mu_P(u_i, u_j) \leqslant \mu_P^T(u_i, u_j). \end{cases}$$

Далее определяется множество недоминируемых альтернатив U_P^{nd} с функцией принадлежности

$$\mu_P^{nd}(u_i) = 1 - \max_{u_j \in P}\{\mu_P^S(u_j, u_i)\}, \quad u_i \in U.$$

2. Строится выпуклая свертка Q отношений R_k, которая определяется как $Q = \sum \lambda_k R_k, \quad \mu_Q(u_i, u_j) = \sum\limits_k \lambda_k \mu_k(u_i, u_j)$. Она является новым н.о.п., с которым ассоциируются его отношение строгого предпочтения Q^S и множество недоминируемых альтернатив U_Q^{nd} . Множества U_P^{nd} и U_Q^{nd} несут дополняющую друг друга информацию о недоминируемости альтернатив.

3. Рассматривается пересечение полученных множеств U_P^{nd} и U_Q^{nd}: $U^{nd} = U_P^{nd} \cap U_Q^{nd}$ с функцией принадлежности

$$\mu^{nd}(u_i) = \min\{\mu_P^{nd}(u_i), \mu_Q^{nd}(u_i)\}.$$

4. Выбирается та альтернатива $u*$, для которой значение $\mu^{nd}(u*)$ максимально: $u* = \arg\max \mu^{nd}(u_i), \quad u_i \in U$.

Пример 2.2. На множестве $U = \{u_1, \ldots, u_4\}$ пять экспертов задали отношения R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 матрицами M_1, M_2, M_3, M_4, M_5.

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.2 & 0.4 \\ 0 & 1 & 0.8 & 0.6 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0.9 \\ 1 & 1 & 0.9 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.7 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.9 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0.6 \\ 0.5 & 1 & 1 & 0.8 \\ 1 & 0.5 & 0.5 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 1 & 0.6 \\ 0.5 & 1 & 0.3 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Весовые коэффициенты относительной важности экспертов с точки зрения лица, принимающего решения: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0.2, \ \lambda_3 = 0.3,$

$\lambda_5 = 0.1$. Свертки P и Q отношений R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 определяются матрицами:

$$M_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_Q = \begin{bmatrix} 1 & 0.34 & 0.49 & 0.62 \\ 0.5 & 1 & 0.67 & 0.71 \\ 0.45 & 0.45 & 1 & 0.39 \\ 0.6 & 0.45 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Множества P^S, Q^S определяются матрицами

$$M_P^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_Q^S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.04 & 0.02 \\ 0.16 & 0 & 0.22 & 0.71 \\ 0.45 & 0.45 & 1 & 0.39 \\ 0.6 & 0.45 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Множества U_P^{nd}, U_Q^{nd} определяются векторами $\nu_P^{nd} = [0.5, 1, 0.8, 0.5]$, $\nu_Q^{nd} = [0.84, 1, 0.78, 0.74]$, откуда $\mu^{nd} = [0.5, 1, 0.78, 0.5]$.

Значит, $u* = u_2$. ■

Задача принятия решения с группой экспертов, характеризуемых нечетким отношением нестрогого предпочтения между ними

Можно рассмотреть задачу принятия решений с группой экспертов, характеризуемых не весовыми коэффициентами, а при помощи еще одного н.о.п. N, заданного на множестве E экспертов с функцией принадлежности $\mu_N(e_k, e_l)$, $\quad e_k, e_l \in E$, значения которой означают степень предпочтения эксперта e_k по сравнению с экспертом e_l .

Алгоритм решения задачи

1. С каждым R_k ассоциируются R_k^S и U_k^{nd}, вводится обозначение $\mu_k^{nd}(u_i) = \mu_\Phi(k, u_i)$, $\quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, m$. Тем самым задается нечеткое соответствие Φ между множествами E и U.

2. Строится свертка Γ в виде композиции соответствий $\Gamma = \Phi^T N \Phi$. Причем, результирующее отношение Γ определяется как максминное произведение матриц Φ^T, N, Φ. То есть, получается единое результирующее отношение, полученное с учетом информации об относительной важности н.о.п. R_k. С отношением Γ ассоциируется отношение Γ^S и множество U_Γ^{nd}.

3. Корректируется множество U_Γ^{nd} до множества $U_\Gamma^{\prime nd}$ с функцией принадлежности $\mu_\Gamma^{nd}(u_i) = \min\{\mu_\Gamma^{nd}(u_i), \mu_\Gamma(u_i, u_i)\}$.

4. Выбирается та альтернатива, для которой значение функции принадлежности скорректированного нечеткого подмножества $U_\Gamma^{\prime nd}$ недоминируемых альтернатив максимально.

2.2. Нечеткие реляционные уравнения

Элементы теории нечетких реляционных уравнений можно найти в [39, 49, 56–58].

Пусть X, Y, Z — дискретные четкие множества конечной мощности m, n и k соответственно, $\widetilde{Q}(X,Y)$, $\widetilde{R}(Y,Z)$, $\widetilde{S}(X,Z)$ — нечеткие соответствия и пусть имеется композиция

$$\widetilde{Q} \circ \widetilde{R} = \widetilde{S}, \tag{2.8}$$

где $\circ = (\max, T)$ или $\circ = (\min, I)$ при $I(x,y) = I_{T,N}(x,y)$. (2.8) соответствует матричному уравнению

$$Q \circ R = S, \tag{2.9}$$

где $Q_{n\times m}$, $R_{m\times k}$, $S_{n\times k}$ — матричные представления $\widetilde{Q}$, $\widetilde{R}$ и $\widetilde{S}$ соответственно. Прямая задача нахождения представления нечеткого соответствия S при заданных Q, R и правиле композиции тривиальна. Рассмотрим так называемую *обратную задачу* для нечетких соответствий, т.е.

(i) определение Q при известных R, S и $\circ$;

(ii) определение R при известных Q, S и $\circ$.

По аналогии с терминологией матричной алгебры, будем называть первое уравнение левым, а второе, соответственно, правым *нечетким реляционным уравнением* (Fuzzy Relational Equation, FRE). Заметим, что в силу коммутативности t-нормы при $\circ = (\max, T)$ задача (ii) сводится к (i), т.е. в этом случае достаточно рассмотреть только левые уравнения.

Методы решений нечетких реляционных уравнений различаются в зависимости от размерностей Q, R и S.

2.2.1. Необходимые сведения

1. Введем на множестве матриц фиксированного размера отношение порядка:

$$(a_{ij}) \leqslant (b_{ij}) \Leftrightarrow a_{ij} \leqslant b_{ij}, \forall i, j.$$

Данное отношение частично упорядочивает множество матриц (следовательно, и множество векторов): не любые две матрицы можно сравнить между собой.

2. *Объединением* двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ будем называть матрицу $C = A \cup B = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{ij} \cup b_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\}$.

Пересечением двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ будем называть матрицу $C = A \cap B = (c_{ij})$, где $c_{ij} = a_{ij} \cap b_{ij} = \min\{a_{ij}, b_{ij}\}$.

3. Обычно нечеткое реляционное уравнение имеет не единственное решение. *Максимальным* (*минимальным*) решением будем называть такое решение X_0, что $X_0 \geqslant X_i$ (соответственно, $X_0 \leqslant X_i$) для всех X_i из множества решений.

4. Множество решений простейшего уравнения (известные представляют собой числа из $L = [0, 1]$) может быть пустым, единственным из L или быть отрезком, принадлежащим L.

Структура множества решений (если оно существует) остальных нечетких реляционных уравнений приведена на рисунке 2.21. Для max-T

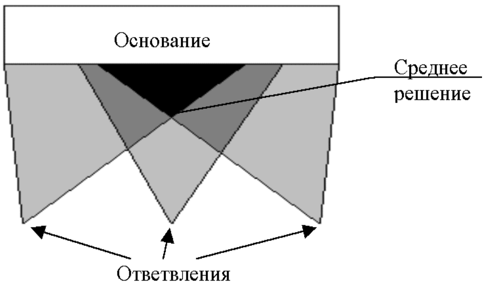


Рис. 2.21. Общая структура решения

и левых min-I уравнений основание представляет собой максимальное решение, ответвления — множество минимальных. Для правых min-I уравнений основание — минимальное решение, ответвления — множество максимальных.

5. Множество решений нечетких уравнений *выпукло упорядочено*, т.е., если (x_{ij}) и (y_{ij}) — два различных решения и $x_{ij} \leqslant z_{ij} \leqslant y_{ij}$ для любых i и j, то решением будет и (z_{ij}). Следовательно, основной задачей является отыскание основания и всех ответвлений данного уравнения.

6. Схемы рассуждений, доказательств и свойства различных типов уравнений схожи, поэтому будем рассматривать только один тип уравнений (чаще всего левые min-I уравнения). Результаты для остальных будут приведены без доказательств. Самостоятельное получение этих результатов может служить как тренировкой для читателя, так и проверкой усвоения материала.

Рассуждения для max-T и левых min-I уравнений идентичны, для правых $\min$-I уравнений они носят двойственный характер (т.е. максимум заменяется на минимум, наибольшее решение на наименьшее и т.п.). Конечные результаты для всех типов уравнений приведены в конце этого раздела.

2.2.2. Простейшие нечеткие реляционные уравнения

Рассмотрим простейший случай, когда известные в обеих частях представляют собой числа из $L = [0, 1]$. Требуется найти x, удовлетворяющий одному из уравнений при $a, b \in L$:

$$T(x, a) = b, \tag{2.10}$$

$$I(x, a) = b, \tag{2.11}$$

$$I(a, x) = b. \tag{2.12}$$

Решения (2.10)–(2.12) могут быть найдены как пересечения решений двух соответствующих неравенств: например, $T(x, a) \leqslant b$ и $T(x, a) \geqslant b$ для (2.10). Введем ряд так называемых *разностных операторов*:

$$\begin{aligned}
T^-(a, b) &= \min\{z \in L \mid T(z, a) \geqslant b\},\\
T^+(a, b) &= \max\{z \in L \mid T(z, a) \leqslant b\},\\
I_l^-(a, b) &= \min\{z \in L \mid I(z, a) \leqslant b\},\\
I_l^+(a, b) &= \max\{z \in L \mid I(z, a) \geqslant b\},\\
I_r^-(a, b) &= \min\{z \in L \mid I(a, z) \geqslant b\},\\
I_r^+(a, b) &= \max\{z \in L \mid I(a, z) \leqslant b\}.
\end{aligned}$$

Предложение 2.1. *$T^+(a, b)$, $I_l^+(a, b)$ и $I_r^-(a, b)$ существуют при любых $a, b \in L$.*

Доказательство. Можно указать по крайней мере одно значение z, при котором выполняются входящие в операторы неравенства: $z = 0$ для первых двух и $z = 1$ для последнего. Частные функции t-нормы, t-конормы и импликатора непрерывны, откуда следует возможность указать максимальный (минимальный) элемент, удовлетворяющий неравенству. □

Предложение 2.2. Если $a < b$, то $T^-(a, b) = \varnothing$. Если $a > b$, тогда $I_l^-(a, b) = \varnothing$. Если $b < N(a)$, то $I_r^+(a, b) = \varnothing$.

Доказательство. Докажем утверждение для первого оператора, для остальных рассуждения аналогичны. Пусть $T^{-}(a,b) \neq \oslash$, тогда $\exists z_0 \in L$, такое, что $T(z_0,a) \geqslant b$. По свойству PT1 имеем $T(z_0,a) \leqslant a$. Принимая во внимание предыдущее неравенство, имеем $b \leqslant a$. Полученное противоречие доказывает предложение. □

Из предложений 2.1, 2.2 и определений разностных операторов следует, что неравенства $T(x,a) \geqslant b$, $I(x,a) \geqslant b$ и $I(a,x) \geqslant b$ имеют решения $[0, T^{+}(a,b)]$, $[0, I_l^{+}(a,b)]$ и $[I_r^{-}(a,b), 1]$ соответственно. Решения двойственных им неравенств, как следует из предложения 2.2, существуют при $a \geqslant b$, $a \leqslant b$ и $b \geqslant N(a)$; ими будут отрезки $[T^{-}(a,b), 1]$, $[I_l^{-}(a,b), 1]$ и $[0, I_r^{+}(a,b)]$.

Пересечение соответствующих решений неравенств является решением (2.10)-(2.12). Кроме того, предложение 2.2 дает необходимые и достаточные условия их разрешимости. Таким образом, решениями уравнений (2.10)-(2.12) будут

$$[T^{-}(a,b), T^{+}(a,b)], \quad \text{если } b \leqslant a, \tag{2.13}$$

$$[I_l^{-}(a,b), I_l^{+}(a,b)], \quad \text{если } a \leqslant b, \tag{2.14}$$

$$[I_r^{-}(a,b), I_r^{+}(a,b)], \quad \text{если } N(a) \leqslant b. \tag{2.15}$$

Если условия предложения 2.2 выполняются, то уравнение имеет пустое множество решений.

Предложение 2.3. Если каждое из уравнений вида (2.10)-(2.12) разрешимо, то

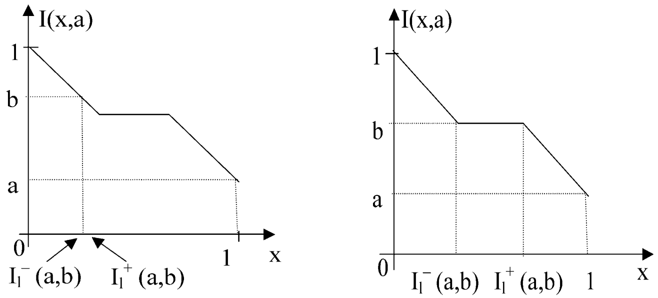
$$\begin{aligned}
T(T^{+}(a,b),a) = b \quad &\text{и} \quad T(T^{-}(a,b),a) = b,\\
I(I_l^{+}(a,b),a) = b \quad &\text{и} \quad I(I_l^{-}(a,b),a) = b,\\
I(a, I_r^{+}(a,b)) = b \quad &\text{и} \quad I(a, I_r^{-}(a,b)) = b.
\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем для левого $\min$-I уравнения первое равенство. Пусть $\delta = I_l^{+}(a,b)$. В силу непрерывности функции $I(x,a)$ существует такое $c_0 \in L$, что $I(c_0,a) = b$. Так как функция $I(x,a)$ невозрастающая, то выполняется $I(c_1,a) \leqslant I(c_0,a) = b$ для любого $c_1 \in L$, $c_1 > c_0$.

Максимальный элемент c_1, удовлетворяющий равенству $I(c_1,a) = I(c_0,a)$, существует и будет равен δ. При $I(c_1,a) < I(c_0,a)$ элемент c_0 есть максимальный элемент, удовлетворяющий неравенству $I(c_0,a) = b$, т.е. $c_0 = \delta$.

Доказательство остальных равенств аналогично приведенному. □

Несколько слов о форме определения разностных операторов. На рис. 2.22 показан геометрический смысл разностных операторов левых min-I уравнений при единственном решении и отрезке решений. Операции min и max при задании разностных операторов используются как для определения единственного решения, так и концов отрезка.



а) единственное решение б) отрезок решений

Рис. 2.22. Определение разностных операторов

Конкретный вид разностных операторов для часто встречающихся t-норм и импликаторов приведен в таблицах 2.4-2.6.

Пример 2.3. Приведем примеры разрешимых и неразрешимых уравнений.

a) Уравнение $T(0.2, x) = 0.9$ имеет пустое множество решений, т. к. $0.2 < 0.9$.

b) Уравнение $T(x, 0.5) = 0.5$ при $T = min(x, y)$ разрешимо, т. к. $0.5 \leqslant 0.5$. $T^-(0.5, 0.5) = 0.5$, $T^+(0.5, 0.5) = 1$, следовательно, множеством решений является отрезок $[0.5, 1]$. □

2.2.3. Полиномиальные уравнения

Нечеткое реляционное уравнение вида

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \circ (a_1, a_2, \dots, a_n)^T = b \quad \text{или}$$
$$(a_1, a_2, \dots, a_n) \circ (x_1, x_2, \dots, x_n)^T = b$$

при заданных $\{a_i\}$, b и $\circ$, будем называть *полиномиальным*. Символ T в левых частях — символ транспонирования.

Правые уравнения будем рассматривать только для $\min$-I композиций, так как в силу коммутативности t-нормы правое и левое уравнения для $\max$-T композиций совпадают.

Решение полиномиальных уравнений с различными типами композиций сведем к решению множества уравнений (2.10)-(2.12) соответственно, для чего перепишем их в следующем виде:

$$\max\{T(x_i, a_i)\} = b, \tag{2.16}$$

$$\min\{I(x_i, a_i)\} = b, \tag{2.17}$$

$$\min\{I(a_i, x_i)\} = b. \tag{2.18}$$

Очевидно, что если все простейшие уравнения не имеют решений, то, полиномиальное также его не имеет.

Приведем необходимое и достаточное условия разрешимости, например, уравнения (2.17), условия для остальных будут указаны ниже.

Теорема 2.1. Для того, чтобы уравнение (2.17) имело непустое множество решений, необходимо и достаточно, чтобы

$$\min\{a_i\} \leqslant b, i = \overline{1, n}. \tag{2.19}$$

Доказательство. Пусть $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — какое-либо решение уравнения (2.17). Для всех j, для которых $I(x_j^0, a) = b$, выполняется $a_j \leqslant b$, а значит и (2.19).

Докажем обратное. Пусть $\min\{a_i\} \leqslant b$, следовательно, хотя бы одно из уравнений $I(x, a_i) = b$ имеет непустое множество решений. Если $\delta_i = I_l^+(a_i, b)$, то для (2.17) выполняется

$$\min\{I(\delta_i, a_i)\} = \min\{b, b, \ldots, b\} = b.$$

□

Следствие. Для того, чтобы уравнение (2.17) имело непустое множество решений, необходимо и достаточно, чтобы $G = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, $\delta_i = I_l^+(a_i, b)$, было решением этого уравнения. Кроме того, оно будет максимальным решением.

Доказательство. Необходимое и достаточное условия следствия к теореме 2.1 очевидны. Докажем, что G — максимальное решение.

Пусть $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — любое другое решение (2.17), тогда $\min\{I(x_i, a_i)\} = b$, откуда $I(x_i, a_i) \geqslant b$. Так как $I(\delta_i, a_i) = b$, то $x_i \leqslant \delta_i$ для всех $i = \overline{1, n}$, т.е. $X \leqslant G$. □

Замечание 1. Условие (2.19) равносильно существованию такого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, что $a_k \leqslant b$.

Множество векторов-строк $\{M_i \,|\, a_i \leqslant b\}$, где

$$M_i(k) = \begin{cases} I_l^-(a_i, b), & \text{при } i = k; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{2.20}$$

есть множество минимальных решений (2.17). Это следует из предложения 2.3, свойств импликатора и определения $I_l^-(a, b)$.

Покажем, что все решения, расположенные между G и каждым минимальным решением, составляют полное множество решений (2.17) и других не существует. Пусть $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — решение (2.17). Тогда по теореме 2.1 $X^0 \leqslant G$. Кроме того, так как $\min\{I(x_i^0, a_i)\} = b$, то $I(x_i^0, a_i) \geqslant b$ для всех i. Пусть j принимает все такие значения от 1 до n, что $I(x_j^0, a_j) = b$. Так как $b = I(\sigma_j, a_j)$, то в силу определения $I_l^-(a_i, b)$, имеем $x_j^0 \geqslant \sigma_j$. Таким образом, для любого решения X_0 найдется M_i, такое, что $M_i \leqslant X^0 \leqslant G$.

В таблице 2.7 в конце данного раздела приведены необходимые и достаточные условия разрешимости и формулы для нахождения оснований и ответвлений уравнений (2.16)-(2.18).

Пример 2.4. Решим уравнение $(0.2, 0.7, 0, 0.5) \circ (x_1, x_2, x_3, x_4)^T = 0.4$ при $\circ = (max, T)$, $T = W(x, y) = max(x + y - 1, 0)$.

Уравнение разрешимо, т.к. $\max\{a_i\} = 0.7 \geqslant b = 0.4$. Максимальное решение $G = (T^+(a_1, b), T^+(a_2, b), T^+(a_3, b), T^+(a_4, b)) = (1, 0.7, 1, 0.9)$. $a_2 \geqslant b$ и $a_4 \geqslant b$, следовательно, существует два минимальных решения:

$$M_1 = (0, T^-(a_2, b), 0, 0) = (0, 0.7, 0, 0),$$

$$M_2 = (0, 0, 0, T^-(a_4, b)) = (0, 0, 0, 0.9).$$

□

2.2.4. Системы полиномиальных уравнений

Если нечеткое реляционное уравнение содержит композицию неизвестной вектор-строки и заданной матрицы или заданной матрицы и неизвестного вектор-столбца, то решение сводится к решению *системы* *нечетких полиномиальных уравнений.* Для различных композиций:

$$\max_i\{T(x_i, a_{ij})\} = b_j, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}; \tag{2.21}$$

$$\min_i\{I(x_i, a_{ij})\} = b_j, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,k}; \tag{2.22}$$

$$\min_i\{I(a_{ij}, x_i)\} = b_j, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}. \tag{2.23}$$

Укажем необходимое и достаточное условия существования решений и правила нахождения полного множества решений системы (2.22).

Теорема 2.2. Для того, чтобы система (2.22) имела непустое множество решений, необходимо и достаточно, чтобы решением этой системы было $G = \bigcap G_j$, где G_j — максимальное решение j-го полиномиального уравнения. Кроме того, G будет максимальным решением (2.22).

Доказательство. Пусть система (2.22) имеет непустое множество решений, т.е. существует такой вектор $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0)$, что для всех j выполняется $\min\{I(x_i^0, a_{ij})\} = b_j$.

На основании следствия к теореме 2.1, максимальные решения G_j существуют. Пусть $G_j = (g_{j1}, g_{j2}, \ldots, g_{jm})$, тогда

$$G = \left(\min_j\{g_{j1}\}, \min_j\{g_{j2}\}, \ldots, \min_j\{g_{jm}\}\right) = (g_1, g_2, \ldots, g_m)$$

является наибольшим возможным решением для всех j уравнений, т.е. для (2.22). В силу свойств импликатора, имеем $G \circ (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T \geqslant b_j$.

Покажем, что ни для какого b_j не может выполняться строгое неравенство. Так как G_j — максимальные решения уравнений, то G является возможным максимальным решением системы. Пусть строгое неравенство выполняется для b_S и пусть M^s — множество минимальных решений этого уравнения.

Для любого $M \in M^s$ справедливо $M \circ (a_{1s}, a_{2s}, \ldots, a_{ms})^T = b_S$. В силу определения $I_l^+(a, b)$ имеем $G < M$, то есть максимально возможное решение системы меньше любого минимального решения s-го уравнения, т.е. множество решений (2.22) пусто, что неверно по допущению.

Таким образом, $G \circ (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T = b_j$ для всех j, следовательно, G — решение (2.22). Обратное утверждение теоремы очевидно. □

Пусть $M^j = \{M_1^j, M_2^j, \ldots, M_{\alpha_j}^j\}$ — множество минимальных решений j-го уравнения системы (2.22). Составим всевозможные объединения

$$\left\{\bigcup_j M_{\beta_j}^j \mid M_{\beta_j}^j \in M^j \wedge M_{\beta_j}^j \leqslant G\right\}.$$

Отбирая минимальные элементы этого множества (и не сравнимые ни с одним из оставшихся) получим множество ответвлений системы.

В таблице 2.8 приведены необходимые и достаточные условия разрешимости для уравнений типов (2.21)-(2.23).

Пример 2.5. Решим уравнение (2.22) при $I = \min(1 - x + y, 1)$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.1 & 1 \\ 0.4 & 0.5 & 0.4 \\ 0.8 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (0.7, 0.5, 0.7)$$

с неизвестным $X = (x_1, x_1, x_3, x_4)$. Оно соответствует системе трех уравнений (2.17) $X \circ A^j = b_j$. Находим максимальные решения этих уравнений:

$$G_1 = (0.5, 0.9, 0.7, 1), \quad G_2 = (1, 0.6, 1, 0.5), \quad G_3 = (0.5, 0.6, 0.7, 0.5),$$
$$G = G_1 \cap G_2 \cap G_3 = (0.5, 0.6, 0.7, 0.5).$$

Проверкой убеждаемся, что возможное решение G — решение системы, следовательно, система имеет непустое множество решений. Уравнения имеют три, три и два минимальных решения соответственно:

$$M_1^1 = (0.5, 0, 0, 0), \quad M_2^1 = (0, 0.9, 0, 0), \quad M_3^1 = (0, 0, 0.7, 0);$$
$$M_1^2 = (0, 0.6, 0, 0), \quad M_2^2 = (0, 0, 1, 0), \quad M_3^2 = (0, 0, 0, 0.5);$$
$$M_1^3 = (0.5, 0, 0, 0), \quad M_2^3 = (0, 0, 0.7, 0).$$

Составим всевозможные объединения $M_{\beta_1}^1 \cap M_{\beta_2}^2 \cap M_{\beta_3}^3$:

$$\begin{aligned}
M_1^1 \cup M_1^2 \cup M_1^3 &= (0.5, 0.6, 0, 0), \\
M_1^1 \cup M_1^2 \cup M_2^3 &= (0.5, 0.6, 0.7, 0), \\
M_1^1 \cup M_2^2 \cup M_1^3 &= (0.5, 0, 1, 0), \\
M_1^1 \cup M_2^2 \cup M_2^3 &= (0.5, 0, 1, 0), \\
M_1^1 \cup M_3^2 \cap M_1^3 &= (0.5, 0, 0, 0.5), \\
M_1^1 \cup M_3^2 \cap M_2^3 &= (0.5, 0, 0.7, 0.5), \\
M_2^1 \cup M_1^2 \cup M_1^3 &= (0.5, 0.9, 0, 0), \\
M_2^1 \cup M_1^2 \cup M_2^3 &= (0, 0.9, 0.7, 0), \\
M_2^1 \cup M_2^2 \cup M_1^3 &= (0.5, 0.9, 1, 0), \\
M_2^1 \cup M_2^2 \cup M_2^3 &= (0, 0.9, 1, 0), \\
M_2^1 \cup M_3^2 \cap M_1^3 &= (0.5, 0.9, 0, 0.5),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M_2^1 \cup M_3^2 \cap M_2^3 &= (0, 0.9, 0.7, 0.5),\\
M_3^1 \cup M_1^2 \cup M_1^3 &= (0.5, 0.6, 0.7, 0),\\
M_3^1 \cup M_1^2 \cup M_2^3 &= (0, 0.6, 0.7, 0),\\
M_3^1 \cup M_2^2 \cup M_1^3 &= (0.5, 0, 1, 0),\\
M_3^1 \cup M_2^2 \cup M_2^3 &= (0, 0, 1, 0),\\
M_3^1 \cup M_3^2 \cup M_1^3 &= (0.5, 0, 0.7, 0.5),\\
M_3^1 \cup M_3^2 \cup M_2^3 &= (0, 0, 0.7, 0.5).
\end{aligned}
$$

Отбирая минимальные (а также не сравнимые ни с одним из оставшихся) решения, получим три минимальных решения системы:

$$M_1 = (0.5, 0.6, 0, 0), \quad M_2 = (0.5, 0, 0, 0.5), \quad M_3 = (0, 0.6, 0.7, 0). \quad \square$$

2.2.5. Уравнения общего вида

Нечеткое реляционное уравнение, содержащее композицию двух матриц, назовем *уравнением общего вида*. Если $A = A_{m\times k}$, $B = B_{n\times k}$, то $X \circ A = B$ — левое уравнение общего вида с неизвестным $X = X_{n\times m}$, если $A = A_{n\times m}$, $B = B_{n\times k}$, то $A \circ X = B$ — правое уравнение общего вида с неизвестным $X = X_{m\times k}$.

Каждое уравнение общего вида распадается на систему независимых уравнений (2.21)-(2.23) в зависимости от его типа, например систему $X_i \circ A = (b_{i1}, b_{i2}, \ldots, b_{ik})$ для левого и $A \circ X^j = (b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{kj})$ для правого, где X_i и X^j — i-я строка и j-й столбец матрицы X. Независимость означает то, что каждое уравнение такой системы решается отдельно и множество его решений не зависит от остальных.

Приведем алгоритмы построения полного множества решений уравнений общего вида.

Для левого уравнения:

1. Находим для каждого i-го уравнения из системы независимых уравнений основание O_i и множество ответвлений V^i.
2. Основанием левого уравнения общего вида будет X, где $X_i = O_i$.
3. Множество $M = \{\forall M \mid M_i \in V^i\}$ будет множеством ответвлений данного уравнения, M_i — i-я строка M.

Для правого уравнения:

1. Находим для каждого j-го уравнения из системы независимых уравнений основание O^j и множество ответвлений V^j.

2. Основанием правого уравнения общего вида будет X, где $X^j = O^j$.
3. Множество $M = \{\forall M \mid M^j \in V^j\}$ будет множеством ответвлений данного уравнения, M^j — j-й столбец M.

Пример 2.6. Решим левое уравнение общего вида при

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.6 & 0.1 & 1 \\ 0.4 & 0.5 & 0.4 \\ 0.8 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.7 \\ 0.8 & 0.6 & 0.8 \end{pmatrix}$$

с неизвестным $X = X_{2\times 4}$. Уравнение распадается на систему двух независимых уравнений $X_1 \circ A = B$ и $X_2 \circ A = B$, первое из которых было решено в примере 2.5. Уравнения системы имеют максимальные решения

$$G_1 = (0.5, 0.6, 0.7, 0.5), \qquad G_2 = (0.4, 0.5, 0.6, 0.4)$$

и множества минимальных:

$$\begin{aligned} &V^1: \quad M_1^1 = (0.5, 0.6, 0, 0), \quad M_2^1 = (0.5, 0, 0, 0.5), \quad M_3^1 = (0, 0.6, 0.7, 0); \\ &V^2: \quad M_1^2 = (0.4, 0.5, 0, 0), \quad M_2^2 = (0.4, 0, 0, 0.4), \quad M_3^2 = (0, 0.5, 0.6, 0). \end{aligned}$$

Максимальным решением уравнения общего вида будет

$$G = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.7 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix},$$

множество минимальных составят

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_4 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}, \qquad M_6 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0 & 0.4 \end{pmatrix},$$

$$M_9 = \begin{pmatrix} 0 & 0.6 & 0.7 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждое решение из $M_1, \ldots, M_9$ не сравнимо с остальными, поэтому множество $\{M_1, \ldots, M_9\}$ и составляет множество ответвлений. $\square$

Таблица 2.4.

Разностные операторы для max-T уравнений

$T(x,y)$	$T^-(a,b)$	$T^+(a,b)$
M(x,y)	$\begin{cases} 1, & \text{если } a < b \\ b, & \text{иначе} \end{cases}$	$\begin{cases} 1, & \text{если } a \leqslant b \\ b, & \text{иначе} \end{cases}$
P(x,y)	$\begin{cases} 1, & \text{если } a < b \\ b/a, & \text{если } 0 < b \leqslant a \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\begin{cases} 1, & \text{если } a \leqslant b \\ b/a, & \text{иначе} \end{cases}$
W(x,y)	$\begin{cases} 1, & \text{если } a < b \\ 1 - a + b, & \text{если } 0 < b \leqslant a \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\min(1 - a + b, 1)$

Таблица 2.5.

Разностные операторы для левых min-I уравнений

$I(x,y)$	$I_l^-(a,b)$	$I_l^+(a,b)$
$I_{M,N_S}(x,y)$	$\begin{cases} 1, & \text{если } a < b \\ 1 - a, & \text{иначе} \end{cases}$	$\begin{cases} 1, & \text{если } a \leqslant b \\ 1 - a, & \text{иначе} \end{cases}$
$I_{P,N_S}(x,y)$	$\begin{cases} 1, & \text{если } a < b \\ \dfrac{1-a}{1-b}, & \text{если } b \leqslant a \text{ и } b \neq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\begin{cases} 1, & \text{если } a \leqslant b \\ \dfrac{1-a}{1-b}, & \text{иначе} \end{cases}$
$I_{W,N_S}(x,y)$	$\begin{cases} \min(1 - a + b, 1), & \text{если } a \neq 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$	$\min(1 - a + b, 1)$

Таблица 2.6.

Разностные операторы для правых min-I уравнений

$I(x,y)$	$I_r^-(a,b)$	$I_r^+(a,b)$
$I_{M,N_S}(x,y)$	$\begin{cases} 0, & \text{если } a+b \leqslant 1 \\ y, & \text{иначе} \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } a+b < 1 \\ y, & \text{иначе} \end{cases}$
$I_{P,N_S}(x,y)$	$\begin{cases} 0, & \text{если } a+b \leqslant 1 \\ \dfrac{a+b-1}{a}, & \text{иначе} \end{cases}$	$\begin{cases} 0, & \text{если } a+b < 1 \\ \dfrac{a+b-1}{a}, & \text{если } a+b \geqslant 1 \text{ и } a \neq 0 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$
$I_{W,N_S}(x,y)$	$\max(a+b-1,0)$	$\begin{cases} \max(a+b-1,0), & \text{если } b \neq 1 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$

Таблица 2.7.

Решение полиномиальных уравнений

Уравнение	Н. и д. условия разрешимости	Основание	Ответвления
(2.16)	$\max\{a_i\} \geqslant b$	Максимальное решение: $G = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i = T^+(a_i, b)$	Минимальные решения: $\{M_i \mid a_i \geqslant b\}$, где $M_i(k) = \begin{cases} T^-(a_i,b), & \text{при } i=k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
(2.17)	$\min\{a_i\} \leqslant b$	Максимальное решение: $G = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, $\delta_i = I_l^+(a_i, b)$	Минимальные решения: $\{M_i \mid a_i \leqslant b\}$, где $M_i(k) = \begin{cases} I_l^-(a_i,b), & \text{при } i=k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$
(2.18)	$\min\{N_I(a_i)\} \leqslant b$	Минимальное решение: $K = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)^T$, $\gamma_i = I_r^-(a_i, b)$	Максимальные решения: $\{M_i \mid N_I(a_i) \leqslant b\}$, где $M_i(k) = \begin{cases} I_r^+(a_i,b), & \text{при } i=k \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Таблица 2.8.

Решение систем полиномиальных уравнений

Уравнение	Н. и д. условия разрешимости	Основание	Ответвления
(2.21)	$G = \bigcap G_j$ — решение, где G_j — максимальные решения составляющих уравнений	Максимальное решение: $G = \bigcap G_j$	Минимальные решения: минимальные элементы (а также не сравнимые ни с одним из оставшихся) множества $\{\bigcup M_S \mid M_S \in M^s \wedge M_S \leqslant G\}$, M^s — множество минимальных решений s-го составляющего уравнения
(2.22)	$G = \bigcap G_j$ — решение, где G_j — максимальные решения составляющих уравнений	Максимальное решение: $G = \bigcap G_j$	Минимальные решения: минимальные элементы (а также не сравнимые ни с одним из оставшихся) множества $\{\bigcup M_S \mid M_S \in M^s \wedge M_S \leqslant G\}$, M^s — множество минимальных решений s-го составляющего уравнения
(2.23)	$K = \bigcup K_j$ — решение, где K_j — максимальные решения составляющих уравнений	Минимальное решение: $K = \bigcup K_j$	Максимальные решения: максимальные элементы (а также не сравнимые ни с одним из оставшихся) множества $\{\bigcap M_S \mid M_S \in M^s \wedge M_S \geqslant K\}$, M^s — множество максимальных решений s-го составляющего уравнения

2.3. Нечеткие системы логического вывода

2.3.1. Механизмы логического вывода

Определение 2.1. Пусть x и y — наименования входной и выходной лингвистистических переменных; A и B — некоторые нечеткие множества (функции принадлежности), взятые из терм-множеств переменных x и y соответственно. *Лингвистическим правилом нечеткого логического вывода «если... то...»* (в дальнейшем называемое просто *лингвистическим правилом*) называется конструкция вида

$$R\text{: если } x \text{ есть } A\text{, то } y \text{ есть } B,$$

где «x есть A» — нечеткое высказывание, называемое *предпосылкой*, а «y есть B» — нечеткое высказывание, называемое *следствием* правила.

Лингвистическое правило R может быть интерпретировано как нечеткое следствие (импликация) $A \to B$ и, следовательно, выражено в виде нечеткого соответствия предпосылки и следствия $R = A \to B$, заданного на декартовом произведении областей определения (четких множествах) входной переменной X и выходной переменной Y. *Композиционное правило вывода* выходного значения системы для правила R при входе A' в записи «x есть A'» определяется как нечеткое множество B', получаемое с помощью композиции входа и нечеткого соответствия импликации $B' = A' \circ (A \to B)$. Для получения нечеткого соответствия

$$R = A \times B, \quad R(x, y) = A(x) \to B(y),$$

где $A(x) = \mu_A(x)$ — значение функции принадлежности элемента x нечеткому множеству A, в приложениях наиболее часто используется импликация Мамдани (т.е. $A(x) \to B(y) = \min\{A(x), B(y)\}$) и $\max - \min$ композиции. В этом случае значение функции принадлежности выходного нечеткого множества определяется по формуле

$$B'(y) = \max_{x \in X} \min\left(A'(x), \min\{A(x), B(y)\}\right), \quad y \in Y.$$

Пример 2.7. Зависимость давления (выход y) от температуры (вход x) может быть задана в виде правила

R: если *давление* есть *большое*, то *температура* есть *средняя*,

где *большое* — нечеткая переменная из терм-множества лингвистической переменной *давление*, *средняя* — нечеткая переменная из терм-множества лингвистической переменной *температура*.

Пусть $X = \{800, 830, 860, 900\}$ — множество определения переменной *давление*, $Y = \{300, 350, 400\}$ — множество определения переменной *температура*. Определим нечеткое множество *большое* для давления как $A = \{800/0.4; 830/0.6; 860/0.8; 900/1\}$, нечеткое множество *средняя* для температуры как $B = \{300/0.5; 350/1; 400/0.5\}$. На основе нечеткой импликации Мамдани получим отношение R:

$$R(A, B) = \begin{bmatrix} \min\{0.4, 0.5\} & \min\{0.4, 1\} & \min\{0.4, 0.5\} \\ \min\{0.6, 0.5\} & \min\{0.6, 1\} & \min\{0.6, 0.5\} \\ \min\{0.8, 0.5\} & \min\{0.8, 1\} & \min\{0.8, 0.5\} \\ \min\{1, 0.5\} & \min\{1, 1\} & \min\{1, 0.5\} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 0.8 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Пусть на вход подано *среднее давление*, которое описывается нечетким множеством $A' = \{800/0.5; 830/0.8; 860/0.9; 900/0.5\}$. Если применяется $\max - \min$ композиция, то выход y будет равен нечеткому множеству $B' = \{300/0.5; 350/0.8; 400/0.5\}$. ■

Определение 2.2. *Нечеткой системой логического вывода, основанной на лингвистических правилах «если... то...»* (в дальнейшем называемая просто *нечеткой системой вывода*), называется конструкция вида:

R_1: если x есть A_1, то y есть B_1,
R_2: если x есть A_2, то y есть B_2,
...
R_m: если x есть A_m, то y есть B_m,

где A_i и B_i — нечеткие множества.

Существует два основных способа определения выхода B'. В обоих методах используется понятие *агрегации* правил, т.е. учет суммарного эффекта от работы всех правил. В качестве оператора агрегации Agg обычно применяется s-норма, но допускается использование и произвольной t-нормы. Существует два метода определения выхода системы логических правил.

Первый способ определения выхода состоит в предварительной агрегации нечетких соответствий: $R = Agg(R_1, R_2, \ldots, R_m)$. Результат B'

при заданном входе A' находится при помощи композиционного правила вывода: $B' = A' \circ R$. Если оператор агрегации представляет собой операцию максимума, то механизм логического вывода примет вид

$$B' = A' \circ \bigcup_{i=1}^{n} R_i.$$

Пример 2.8. Расширим систему логического вывода из предыдущего примера, добавив еще одно правило:

R_1: если *давление* есть *большое*, то *температура* есть *средняя*,
R_2: если *давление* есть *низкое*, то *температура* есть *низкая*.

Здесь *большое давление* — $A_1 = \{800/0.4; 830/0.6; 860/0.8; 900/1\}$, *низкое давление* — $A_2 = \{800/1; 830/0.9; 860/0.6; 900/0.4\}$; *средняя температура* $B_1 = \{300/0.5; 350/1; 400/0.5\}$, *низкая температура* $B_2 = \{300/1; 350/0.4; 400/0.1\}$. Тогда

$$R_1 = R_1(A_1, B_1) = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.4 \\ 0.5 & 0.6 & 0.5 \\ 0.5 & 0.8 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$R_2 = R_2(A_2, B_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.9 & 0.4 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

Если агрегация осуществляется на основе операции взятия максимума, то

$$R = \max\{R_1, R_2\} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.4 \\ 0.9 & 0.6 & 0.5 \\ 0.6 & 0.8 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

При входе $A' = \{800/0.5; 830/0.8; 860/0.9; 900/0.5\}$ выход будет следующим:

$$B' = \{300/0.8; 350/0.8; 400/0.5\}$$

■

Второй способ вывода заключается в первоначальном определении выходов для каждого правила с использованием композиции $B'_i = A' \circ R_i$,

$i = \overline{1,m}$. Далее осуществляется агрегация полученных ранее выходов правил $B' = Agg(B'_1, B'_2, \ldots, B'_m)$, т.е.

$$B' = \bigcup_{i=1}^{n} (A' \circ R_i)\,.$$

Пример 2.9. Для предыдущего примера получаем выход первого правила $B'_1 = A' \circ R_1 = \{300/0.5; 350/0.8; 400/0.5\}$, выход второго правила $B'_2 = A' \circ R_2 = \{300/0.8; 350/0.4; 400/0.1\}$. Суммарный выход системы $B' = \max\{B'_1, B'_2\} = \{300/0.8; 350/0.8; 400/0.5\}$. Результат согласуется с предыдущим. ■

В зависимости от операторов композиции и агрегации могут получаться различные результаты [44]. При использовании $\max - \min$ и $\max - *$ композиций ($*$ — символ произведения) совместно с операцией максимума в роли оператора агрегации результаты, полученные обоими механизмами логического вывода, будут эквивалентными. Докажем это на примере $\max - \min$ композиции.

Предложение 2.4. Для $\max - \min$ композиции и $\max$ в качестве оператора агрегации справедливо следующее:

$$A' \circ \bigcup_{i=1}^{n} R_i = \bigcup_{i=1}^{n} (A' \circ R_i)\,.$$

Доказательство. Представим выход нечеткой системы, полученный на основе первого способа логического вывода, $A' \circ \bigcup_{i=1}^{n} R_i$, следующим образом:

$$B'(y) = \max_X \min\{A'(x), \max_{i=1}^{n} R_i(x,y)\}, \quad y \in Y.$$

Обозначив для удобства $\max$ через $\vee$, а $\min$ — через $\wedge$, и используя дистрибутивность операций $\vee$ и $\wedge$, получим, что

$$B'(y) = \max_X \{A'(x) \wedge (R_1(x,y) \vee \ldots \vee R_n(x,y))\} =$$

$$= \max_X \{(A'(x) \wedge R_1(x,y)) \vee \ldots \vee (A'(x) \wedge R_n(x,y))\} =$$

$$= \vee \left\{ \max_X (A'(x) \wedge R_1(x,y)), \ldots, \max_X (A'(x) \wedge R_n(x,y)) \right\},$$

т.к. максимумы берутся по различным множествам. Последнее выражение выражает выход по второму способу $\bigcup_{i=1}^{n} (A' \circ R_i)$. □

Если используется $\max - \min$ композиция и агрегация с помощью операции пересечения, то в общем случае результаты будут различными. Более того, в данном случае выходы (нечеткие множества), полученные на основе первого способа, будут вложены в выходы (нечеткие множества), полученные вторым способом.

Более сложной и интересной является ситуация, когда имеется не одна, а несколько входных переменных (будем считать, что имеется лишь один выход, т.к. в случае нескольких выходных переменных может быть построен набор нечетких систем с одним выходом в каждой из них):

R_1: если x_1 есть A_{11} и ... и x_n есть A_{1n}, то y есть B_1,
R_2: если x_1 есть A_{21} и ... и x_n есть A_{2n}, то y есть B_2,
...
R_m: если x_1 есть A_{m1} и ... и x_n есть A_{mn}, то y есть B_m,

где $x_j, j = \overline{1,n}$ — входные лингвистические переменные, y — выходная лингвистическая переменная; A_{ij} и B_i — нечеткие множества. Логическая связка «и» интерепретируется как t-норма нечетких множеств. В отличие от случая с одной входной переменной представление импликации в виде соответствия в многовходных системах (за исключением случая с двумя входами) невозможно. В связи с этим применяется механизм логического вывод, характерной чертой которого является использование уровней истинности предпосылок правил (firing levels).

Определение 2.3. Под *уровнем истинности предпосылки* (или просто уровнем истинности) i-го правила, понимается вещественное число α_i, характеризующее степень соответствия входа системы $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ нечетким множествам $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{in}$ в предпосылке i-го правила:

$$\alpha_i = \min_{j=1}^{n} \left[\max_{X_j} \left(A'_j(x_j) \wedge A_{ij}(x_j) \right) \right],$$

где X_j — множества определения переменной $x_j, j = \overline{1,n}$.

В случае двух входов x_1 и x_2, алгоритм вывода будет состоять из следующих шагов:

1. Для каждого правила $R_i, i = \overline{1,m}$, вычисляется (рис. 2.23) уровень истинности правила

$$\alpha_i = \min \left[\max_{X_1} \left(A'_1(x_1) \wedge A_{i1}(x_1) \right), \max_{X_2} \left(A'_2(x_2) \wedge A_{i2}(x_2) \right) \right];$$

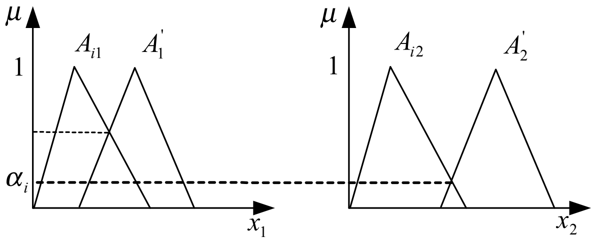


Рис. 2.23. Уровень истинности i-го правила

2. Для каждого правила вычисляются индивидуальные выходы

$$B_i'(y) = \min\left(\alpha_i, B_i(y)\right);$$

3. Вычисляется агрегатный выход

$$B'(y) = \max\left(B_1'(y), B_2'(y), \ldots, B_m'(y)\right).$$

Данный способ вывода называется $\max - \min$ выводом или выводом Мамдани (импликация интерпретируется как операция минимума, агрегация выходов правил — как операция максимума).

Пример 2.10. Нечеткая система зависимости температуры от давления и объема может быть представлена с помощью системы следующих правил:

R_1: если *давление* есть *большое* и *объем* есть *большой*,
то *температура* есть *высокая*,
R_2: если *давление* есть *низкое* и *объем* есть *большой*,
то *температура* есть *средняя*,
R_3: если *давление* есть *большое* и *объем* есть *маленький*,
то *температура* есть *средняя*.

Требуется определить, какой будет температура при *среднем давлении* и *маленьком объеме*.

Пусть *большое давление* описывается с помощью нечеткого множества $A_{11} = A_{31} = \{800/0.4; 830/0.6; 860/0.8; 900/1\}$, *низкое давление* — с помощью $A_{21} = \{800/1; 830/0.9; 860/0.6; 900/0.4\}$; *большой объем* — $A_{21} = A_{22} = \{500/0; 520/0.3; 540/0.7; 560/1\}$, *маленький объем* — $A_{32} = \{500/1; 520/0.8; 540/0.6; 560/0.2\}$. Для выходов: *высокая температура* — $B_1 = \{300/0.1; 350/0.5; 400/1\}$, *средняя температура* —

$B_2 = B_3 = \{300/0.5; 350/1; 400/0.5\}$. Если на первый вход системы подано значение давления $A'_1 = \{800/0.5; 830/0.8; 860/0.9; 900/0.5\}$, а на второй — значение объема $A'_2 = \{500/0.9; 520/0.5; 540/0.3; 560/0\}$, выход получается так:

1. Уровень истинности 1-го правила

$$\alpha_1 = \min[\max(0.5 \wedge 0.4, 0.8 \wedge 0.6, 0.9 \wedge 0.8, 0.5 \wedge 1),$$
$$\max(1 \wedge 0, 0.6 \wedge 0.3, 0.4 \wedge 0.7, 0 \wedge 1)] =$$
$$= \min[\max(0.4, 0.6, 0.8, 0.5), \max(0, 0.3, 0.4, 0)] =$$
$$= \min(0.8, 0.4) = 0.4;$$

аналогично получаем для остальных правил $\alpha_2 = \min(0.8, 0.4) = 0.4$ и $\alpha_3 = \min(0.8, 0.9) = 0.8$;

2. Индивидуальный выход 1-го правила:

$$B'_1 = \{300/\min(0.4, 0.1); 350/\min(0.4, 0.5); 400/\min(0.4, 1)\} =$$
$$= \{300/0.1; 350/0.4; 400/0.4\},$$

аналогично получаем $B'_2 = \{300/0.4; 350/0.4; 400/0.4\}$ для второго и $B'_3 = \{300/0.5; 350/0.8; 400/0.5\}$ для третьего правил;

3. Агрегация индивидуальных выходов

$$B' = B'_1 \vee B'_2 \vee B'_3 =$$
$$= \{300/\max(0.1, 0.4, 0.5); 350/\max(0.4, 0.4, 0.8); 400/\max(0.4, 0.4, 0.5)\}$$

приводит к выходу системы $B' = \{300/0.5; 350/0.8; 400/0.5\}$. ■

Данный механизм логического вывода может быть использован и в том случае, если имеется лишь один вход нечеткой системы. При этом способ, основанный на использовании уровней истинности правил, обладает тем преимуществом, что может быть применен в тех случаях, когда функции принадлежностей непрерывны. Для других механизмов, опирающихся на вычисление отношений между входной и выходной переменными, непрерывная функция предварительно должна быть дискретизирована. В тех случаях, когда функции принадлежностей дискретны, то выходы, получаемые при использовании $\max - \min$ правила композиции и при логическом выводе Мамдани, совпадают.

Предложение 2.5. $B'(y) = \max\limits_{X} (A'(x) \wedge R(x, y)) = \max\limits_{i=1}^{m} (\alpha_i \wedge B_i(y))$.

Доказательство. Аналогично доказательству предыдущего предложения получаем, что

$$B'(y) = \max_{i=1}^{m} \left\{ \max_{X} (A'(x) \wedge R_i(x, y)) \right\} =$$

$$= \max_{i=1}^{m} \left\{ \max_{X} \left(A'(x) \wedge [A_i(x) \wedge B_i(y)] \right) \right\} =$$

$$= \max_{i=1}^{m} \left\{ \max_{X} \left([A'(x) \wedge A_i(x)] \wedge B_i(y) \right) \right\} = \max_{i=1}^{m} \left\{ \alpha_i \wedge B_i(y) \right\}, y \in Y.$$

□

Если в качестве импликации использовать операцию произведения, то мы приходим к механизму логического вывода Ларсена:

1. Для каждого правила $R_i, i = \overline{1, m}$, вычисляется уровень истинности

$$\alpha_i = \min \left[\max_{X_1} (A'_1(x) \wedge A_{i1}(x)), \max_{X_2} (A'_2(x) \wedge A_{i2}(x)) \right];$$

2. Для каждого правила вычисляются индивидуальные выходы по формуле

$$B'_i(y) = \alpha_i B_i(y);$$

3. Вычисляется агрегатный выход

$$B'(y) = \max(B'_1(y), B'_2(y), \ldots, B'_m(y)).$$

Пример 2.11. На основе данных из предыдущего примера получим выход с помощью механизма логического вывода Ларсена:

1. Уровни истинности (получаются также, как и в выводе Мамдани): $\alpha_1 = 0.4$, $\alpha_2 = 0.4$ и $\alpha_3 = 0.8$;
2. Индивидуальные выходы правил:

$$B'_1 = \{300/(0.4 \cdot 0.1); 350/(0.4 \cdot 0.5); 400/(0.4 \cdot 1)\} =$$

$$= \{300/0.04; 350/0.2; 400/0.4\};$$

   а также для второго — $B'_2 = \{300/0.2; 350/0.4; 400/0.2\}$ и для третьего правила — $B'_3 = \{300/0.4; 350/0.8; 400/0.4\}$;
3. Агрегация индивидуальных выходов дает на выходе нечеткое множество $B' = \{300/0.4; 350/0.8; 400/0.4\}$. ■

2.3.2. Нечеткое моделирование

В связи с тем, что во многих прикладных задачах требуется оперировать с обычными (четкими) значениями, моделирование процессов при помощи нечетких систем логического вывода состоит из нескольких этапов [3, 19, 29, 44]:

1. *Фазификации* (приведения к нечеткости);
2. Логического вывода на основе заданных правил (с помощью рассмотренных выше механизмов);
3. *Дефазификации* (приведения к четкости).

На этапе фазификации происходит преобразование четких входных данных в нечеткие множества. В подавляющем большинстве случаев для этого используются синглетонные модели (синглетоны).

Определение 2.4. *Синглетоном* заданного четкого значения x_0 называется нечеткое множество $\tilde{x}^0$ с функцией принадлежности

$$\mu(x) = \begin{cases} 1, & x = x^0; \\ 0, & x \neq x^0. \end{cases}$$

При использовании синглетонов механизм логических выводов упрощается, т.к. степень истинности правил может быть найдена следующим образом:

$$\max_X(A'(x) \wedge A(x)) = \max_X(\tilde{x}^0 \wedge A(x)) = A(x^0).$$

В этом случае вычисление уровня истинности i-го правила при двух входах будет формироваться по формуле

$$\alpha_i = \min\left[A_{i1}(x_1^0), A_{i2}(x_2^0)\right].$$

Дефазификация используется, когда результат (нечеткое множество B) необходимо преобразовать к четкому значению y^*. Наиболее распространены следующие методы дефазификации (в дискретном варианте):

- *центр тяжести (Center-of-Gravity):*

$$y^* = \frac{\sum y_i B(y_i)}{\sum B(y_i)};$$

- *первый максимум (First-of-Maxima):*

$$y^* = \min\{y | B(y) = \max_w B(w)\};$$

- *средний максимум (Middle-of-Maxima):*

$$y^* = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_j, y_j \in \{y|B(y) = \max_w B(w)\},$$

где N — количество точек с максимальным значением функции принадлежности;

- *высотная дефазификация (Height Defuzzification):*

$$y^* = \frac{\sum\limits_{[B]^\alpha} y_i B(y_i)}{\sum B(y_i)},$$

т.е. рассчитывается центр тяжести лишь для элементов заданного α-среза $[B]^\alpha$.

При дефазификации непрерывных функций принадлежности сумму следует заменить на непрерывный аналог — интеграл по носителю нечеткого множества.

Пример 2.12. Проведем дефазификацию выходного множества, полученного ранее при выводе Мамдани: $B' = \{300/0.5; 350/0.8; 400/0.5\}$:

- центр тяжести:

$$y^* = \frac{300 \cdot 0.5 + 350 \cdot 0.8 + 400 \cdot 0.5}{0.5 + 0.8 + 0.5} = \frac{630}{1.8} = 350;$$

- первый и средний максимумы: $y^* = 350$;

- высотная дефазификация при уровне среза $\alpha = 0.6$:

$$y^* = \frac{350 \cdot 0.8}{0.8} = 350.$$

Из-за симметричности и унимодальности функции принадлежности все методы дефазификации дают одинаковый результат. ■

Преобразование четких входных значений в четкие выходы реализовано и в нечетких системах Такаги-Суджено (Takagi-Sugeno). Данные системы в отличие от рассмотренных лингвистических моделей представляют собой комбинацию лингвистической и аналитической моделей:

R_1: если x_1 есть A_{11} и ... и x_n есть A_{1n}, то $y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n)$,
R_2: если x_1 есть A_{21} и ... и x_n есть A_{2n}, то $y_2 = f_2(x_1, \ldots, x_n)$,
...
R_m: если x_1 есть A_{m1} и ... и x_n есть A_{mn}, то $y_m = f_m(x_1, \ldots, x_n)$.

Приведем алгоритм вывода для двухвходной системы Такаги-Суджено:

1. Для каждого правила $R_i, i = \overline{1, m}$, вычисляется уровень истинности правила по формуле
$$\alpha_i = \min\left[A_{i1}(x_1^0), A_{i2}(x_1^0)\right];$$
2. Для каждого правила вычисляются индивидуальные выходы:
$$y_i^* = f_i(x_1, x_2);$$
3. Вычисляется агрегатный выход (вычисление центра тяжести выходов):
$$y^* = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i y_i^*}{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i}.$$

Наиболее распространена афинная модель, то есть модель, следствия которой представляют линейные по параметрам функции, имеющие (для двух входов) вид
$$y_i = f_i(x_1, x_2) = b_{i0} + b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2.$$

Пример 2.13. Заменим в предыдущем примере правила следующим образом:

R_1: если *давление* x_1 есть *большое* и *объем* x_2 есть *большой*,
  то *температура* есть $y_1 = 0.25x_1 + 0.2x_2$,
R_2: если *давление* x_1 есть *низкое* и *объем* x_2 есть *большой*,
R_3: если *давление* x_1 есть *большое* и *объем* x_2 есть *маленький*,
  то *температура* есть $y_1 = 0.2x_1 + 0.3x_2$.

При поданных входах $x_1 = 860$ и $x_2 = 520$ рассчитываем выход следующим образом:

1. Вначале определяем уровень истинности 1-го правила как $\alpha_1 = \min(A_{11}(860), A_{12}(520)) = \min(0.8, 0.3) = 0.3$, аналогично $\alpha_2 = \min(0.6, 0.3) = 0.3$ и $\alpha_3 = \min(0.8, 0.8) = 0.8$;

2. Индивидуальные выходы правил: $y_1 = 319$, $y_2 = 362$, $y_3 = 328$;
3. Вычисляем агрегатный выход:

$$y = \frac{319 \cdot 0.3 + 362 \cdot 0.3 + 328 \cdot 0.8}{0.3 + 0.3 + 0.8} = \frac{466.7}{1.4}.$$

Округляя до целых, получаем $y \approx 333$. ■

Если известны параметры функций принадлежностей в предпосылках, то параметры функций в заключениях могут оцениваться по методу наименьших квадратов. Для произведения такой настройки необходимо наличие множества известных (реальных, экспериментальных) соответствий «вход-выход» $\{x^j, y^j\}, x^j \in \mathbb{R}^n, y^j \in \mathbb{R}^1, j = \overline{1,k}$, на основе которых требуется определить параметры функций с целью минимизации суммы квадратов отклонений реальных выходов от модельных:

$$E = \sum_{j=1}^{k} (y^j - y^j_{mod})^2,$$

где y^j_{mod} — выход модели при заданном входе x^j. В данной постановке эта задача оказывается задачей о наименьших квадратах (ЗНК).

Для каждой пары вычисляются степени истинности правил α_i^j, после чего рассчитываются нормализованные значения

$$\gamma_i^j = \frac{\alpha_i^j}{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^j}.$$

Во введенных обозначениях выход системы при входе j-й пары записывается как

$$y^j = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i^j f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Таким образом, для настройки параметров функций могут использоваться известные методы решения ЗНК. Если все функции являются линейными относительно своих параметров, т.е.

$$y_i = \sum_{l=1}^{p} b_l \phi_l(x_1, \ldots, x_n),$$

где $\phi_l(x_1, \ldots, x_n)$ — *базисные функции*, то задача определения параметров оказывается линейной ЗНК. Решение последней может быть представлено в аналитическом виде. Например, если $f_i = b_i$ — некоторые константы, оптимальные параметры $b^* = [b_1^*, \ldots, b_m^*]^T$ могут быть найдены как

$$b^* = \Gamma^+ y,$$

где $\Gamma = [\gamma_{ji} = \gamma_i^j] \in \mathbb{R}^{k \times m}$ — матрица, строки которой соответствуют данным множества пар «вход-выход», а столбцы — правилам нечеткой системы, Γ^+ — псевддобратная к Γ матрица, y — вектор, составленный из выходов исходных данных.

Более подробную информацию относительно применения нечетких систем Такаги-Суджено к решению практических задач можно найти в работе [19].

2.3.3. Нечеткие контроллеры

Системы, подверженные входному управляющему воздействию вектора u, называются управляемыми. Процесс поддержания выхода такой системы y близким к желаемому выходу $\bar{y}$ называется *управлением* (*регуляцией*). Устройство, предназначенное для управления подобной системой, называется *управляющим устройством* или же *контроллером*. Основная форма дискретного управляющего закона имеет вид

$$u(t) = f(e[t], e[t-1], \ldots, e[t-\tau]; u[t-1], \ldots, u[t-\tau]),$$

где t — дискретный момент времени, $e[t] = \bar{y}[t] - y[t]$ — ошибка между желаемым и реальным значениями выходов, τ — порядок контроллера, а f — некоторая, вообще говоря, нелинейная функция. Такие контроллеры, как видно, реализуют принцип *обратной связи* (рис. 2.24). Контроллеры, в основе работы которого лежат механизмы нечеткого логического вывода вида «если... то...», называются *нечеткими контроллерами* (Fuzzy Logic Controller, FLC).

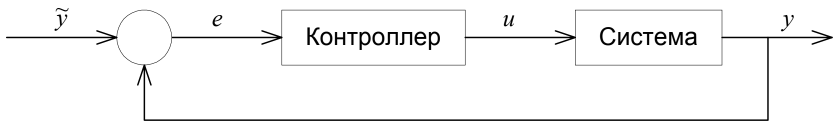


Рис. 2.24. Механизм обратной связи

В 1975 году Мамдани и Ассилиан(Assilian) представили тип контроллера, названный контроллером Мамдани [44]. Суть его действия состоит в определении изменений управляющего воздействия $\Delta u[t] = u[t] - u[t-1]$

в зависимости от ошибки $e[t]$ и ее изменения $\Delta e[t] = e[t] - e[t-1]$ в текущий момент времени. Закон управления 1-го порядка может быть представлен в виде

$$\Delta u[t] = f(e[t], \Delta e[t]).$$

Управляющее воздействие в момент времени t определяется по формуле $u[t] = u[t-1] + \Delta u[t]$. В качестве функций принадлежности в предпосылках и заключениях правил обычно используются безразмерные нормализованные нечеткие множества — разбиения входного пространства. Используются следующие нечеткие треугольные числа: большое отрицательное (БО), среднее отрицательное (СО), маленькое отрицательное (МО), нулевое (НУ), маленькое положительное (МП), среднее положительное (СП) и большое положительное (БП) (рис. 2.25).

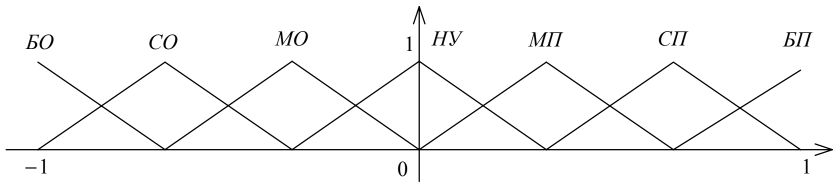


Рис. 2.25. Примерное разбиение входного пространства

Пример 2.14. С помощью лингвистических правил может быть описано управление скоростью автомобиля [3]:

R_1: если $e[t]$ есть P_1, то $\Delta u[t]$ есть P_{u1};
R_2: если $e[t]$ есть N_1, то $\Delta u[t]$ есть N_{u1};
R_3: если $\Delta e[t]$ есть P_2, то $\Delta u[t]$ есть P_{u2};
R_4: если $\Delta e[t]$ есть N_2, то $\Delta u[t]$ есть N_{u2};
R_5: если $\Delta^2 e[t]$ есть P_3, то $\Delta u[t]$ есть P_{u3};
R_4: если $\Delta^2 e[t]$ есть N_3, то $\Delta u[t]$ есть N_{u3},

где $\Delta u[t]$ — управление, приводящее к изменению скорости движения, $\Delta^2 e[t] = \Delta e[t] - \Delta e[t-1]$ — разность отклонений 2-го порядка, P_x и N_x— некоторые положительные и отрицательное нечеткие числа соответственно.

К примеру, первое правило R_1 означает, что если положительна ошибка $e[t] = \bar{y}[t] - y[t]$, т.е. скорость меньше желаемой, то следует увеличить скорость движения. Аналогично могут быть интерпретированы и остальные правила. В качестве функций принадлежности в предпосылках P_i

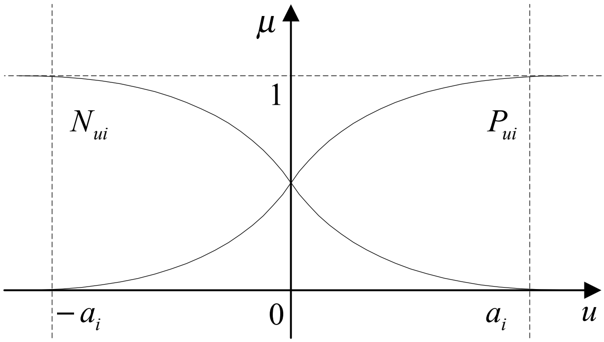


Рис. 2.26. Функции принадлежности предпосылок

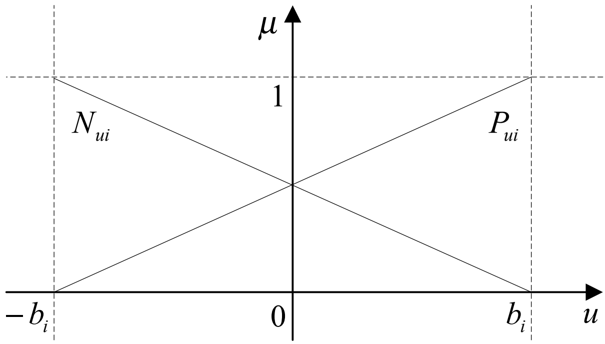


Рис. 2.27. Функции принадлежности заключений

и N_i можно взять арктангенсы или логистические сигмоидные функции (рис. 2.26); в роли P_{ui} и N_{ui}, $i = 1, 2, 3,$ — прямые (рис. 2.27). Использование указанных функций принадлежности в предпосылках позволяет усиливать слабые (почти нулевые) сигналы и ослаблять сильные (насыщенные) сигналы. Данное обстоятельство позволяет управляющей системе оставаться в рабочем состоянии, когда поступают большие ошибочные сигналы. ■

В 1995 году Кастро (Castro) доказал, что нечеткие контроллеры Мамдани с симметричными треугольными функциями принадлежности A_{ij} и B_i, синглетонным способом фазификации и дефазификацией с помощью нахождения центра тяжести являются универсальными аппроксиматорами. Другими словами, отображения, реализуемые этими контроллерами, способны приблизить произвольную непрерывную функцию, заданную на компакте, с любой заданной точностью. Подобные системы могут быть эффективно реализованы в виде компьютерного программного продукта.

Набор лингвистических правил для каждой задачи определяется экспертом. С этим связан как недостаток нечетких контроллеров — субъективный выбор правил, который может оказаться неполным или противоречивым, так и преимущество — возможность привлечения знаний и опыта эксперта. Такие контроллеры легко интерпретируются.

Хотя нечеткие системы имеют обширную область применения, их использование связано со значительными трудностями. Причина такого явления заключается в необходимости выбора подходящих параметров функций принадлежностей. Этот недостаток может быть скомпенсирован способностью искусственных нейронных сетей к настройке весовых коэффициентов.

2.4. Нейро-нечеткие системы

2.4.1. Введение в теорию нейронных сетей

В данном разделе рассматриваются необходимые для дальнейшего изучения понятия теории искусственных нейронных сетей прямого распространения [12, 23, 24].

Определение 2.5. *Искусственный нейрон* (рис. 2.28) представляет собой элемент, преобразующий векторный вход x в скалярный выход y.

Преобразование осуществляется в два этапа:

1. Вычисляется *уровень активности* (activity level) нейрона — скалярное произведение входного вектора $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \in R^n$ и вектора *весов* нейрона $w = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_n \end{bmatrix}^T \in R^n$:
$$net = \sum_{i=1}^{n} w_i x_i = w^T x;$$
2. К рассчитанному значению net применяется нелинейная функция — *функция активации* (activation function), называемая иногда *передаточной* (transfer function):
$$y = f(net).$$

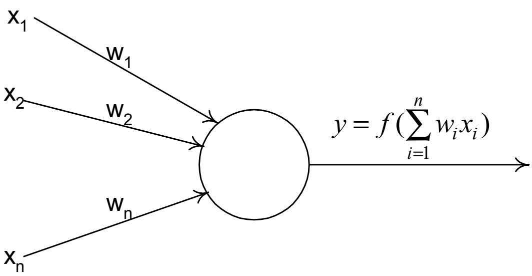


Рис. 2.28. Искусственный нейрон

В качестве функции активации обычно используется одна из следующих:

- сигмоидная логистическая
$$f(net) = \frac{1}{1+e^{-net}};$$
- гиперболический тангенс
$$f(net) = th(net) = \frac{e^{net} - e^{-net}}{e^{net} + e^{-net}};$$
- арктангенс
$$f(net) = arctg(net).$$

Совокупность нейронов образует *искусственную нейронную сеть (НС)*, среди которых самым распространенным классом являются сети прямого распространения. В таких НС нейроны расположены в несколько слоев — нейроны одного слоя, получая входные сигналы с предыдущего, преобразуют их и передают выходы нейронам следующего слоя (рис. 2.29). Слои сети за исключением входного и выходного называются *скрытыми* слоями. Говорят, что НС состоит из M слоев, если она включает входной слой, $(M-1)$ скрытых слоев и выходной слой.

Пусть сеть состоит из M слоев, в m-м слое которой находится N_m нейронов [1]. Обозначим парой (m,i) i-й нейрон m-го слоя, $m = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, N_m}$. Функционирование нейрона представляется формулой

$$y^{(m,i)} = f^{(m,i)}(net^{(m,i)}) = f^{(m,i)}\left(\sum_{j=1}^{N_{m-1}} w_j^{(m,i)} y_j^{(m-1,i)}\right),$$

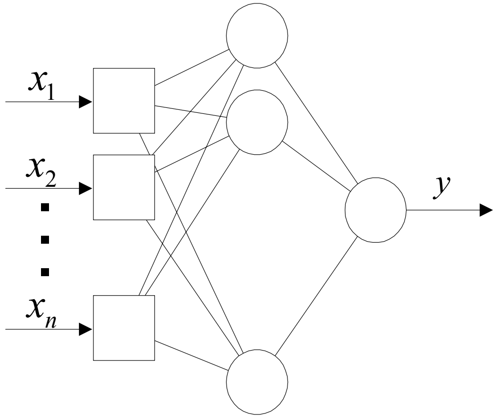


Рис. 2.29. Двухслойная нейронная сеть прямого распространения

где для нейронов первого скрытого слоя ($m = 1$) $y^{(0,i)} = x_i$ — i-й вход сети. В векторно-матричной форме соотношение «вход – выход» слоя можно записать так:

$$y^{(m)} = f^{(m)}(W^{(m)}y^{(m-1)}),$$

где $W^{(m)}$ — матрица весов нейронов m-го слоя, $y^{(m-1)}$ — вектор выходов нейронов $(m-1)$-го слоя. Таким образом, функционирование всей НС в целом может представлено в виде

$$y^{(M)} = f^{(m)}(W^{(m)}f^{(m-1)}(\ldots W^{(2)}f^{(1)}(W^{(1)}x)\ldots)).$$

Как видно, структура НС прямого распространения имеет *суперпозиционный* характер.

Уже двухслойная сеть, состоящая из одного скрытого слоя с нелинейной функцией активации и отсутствующей функцией активации на нейронах второго (выходного) слоя, является *универсальным аппроксиматором* [24]. Фунахаши (Funahashi) доказал следующую теорему.

Теорема 2.3. Пусть $K \subset R^n$ — компактное множество, $f : K \to R$ — непрерывная функция. Пусть $\phi : R \to R$ — непостоянная, ограниченная, монотонно возрастающая непрерывная функция. Тогда для любой заданной точности $\varepsilon > 0$ существует целое число N и вещественные числа

w_i, w_{ij} такие, что

$$\tilde{f}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{N} w_i \phi \left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} x_j \right)$$

удовлетворяет неравенству

$$\|f - \tilde{f}\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x) - \tilde{f}(x)| \leqslant \varepsilon.$$

$\square$

Суть теоремы в том, что с помощью НС можно аппроксимировать любую непрерывную функцию, определенную на компакте, с любой заданной точностью. Для этого необходимо определить количество нейронов в скрытом слое и веса НС.

Определение 2.6. *Обучением* НС называется процесс параметрической идентификации весов сети на основе набора вход-выходных данных, называемых *обучающим множеством*.

Для обучения необходимо обучающее множество $\{\tilde{x}_i, \tilde{y}_i\}, i = \overline{1, k}$, $x_i \in R^n, y_i \in R^1$, состоящее из примеров — входов и соответствующих им выходов сети (*указаний учителя*). Вводится функционал качества обучения $J(w), w \in R^s$ — вектор всех нейронов сети, характеризующий степень соответствия нейросетевой модели данным из обучающего множества, требующий минимизации. В его роли наиболее часто используется квадратичный функционал, т.е. сумма квадратов отклонений результатов работы сети от указаний учителя на всех примерах. В случае одновыходной сети функционал будет выглядеть следующим образом:

$$J(w) = \sum_{i=1}^{k} E_i(w) = \sum_{i=1}^{k} (y_i - \tilde{y}_i)^2,$$

где $y_i = f(w, \tilde{x}_i)$ — результат, получаемый сетью на i-м примере обучающего множества. В этом случае задача обучения НС представляет собой нелинейную ЗНК (НЗНК).

Для обучения НС может использоваться обширный аппарат методов оптимизации. В основе итерационных методов нелинейной оптимизации лежит использование информации о поведении функционала в окрестности текущей точки (вектора) оптимизируемых параметров w_c. Для этого строится линейная аппроксимация функционала

$$J(w) \approx J(w_c) + \nabla_w J(w)(w - w_c).$$

Суперпозиционная структура НС позволяет эффективно вычислять градиент $\nabla_w J(w)$ на основе формулы производной сложной функции. В теории НС данный способ нахождения градиента называется процедурой *обратного распространения ошибки (ОРО)* (error backprropagation) [1,12,23,24]. Из-за аддитивности операции дифференцирования следует, что

$$\nabla_w J(w) = \nabla_w \left(\sum_{i=1}^{k} E_i(w) \right) = \sum_{i=1}^{k} \nabla_w E_i(w),$$

поэтому достаточно вывести формулу вычисления градиента по ошибке на одном примере обучающего множества. Обозначив $E_i(w)$ через $E(w)$ (соответственно, y_i через y и $\tilde{y}_i$ через $\tilde{y}$) для упрощения записи, получаем

$$\frac{\partial E(w)}{\partial w^{(m,i)}} = \frac{\partial E(w)}{\partial y^{(m,i)}} \frac{\partial y^{(m,i)}}{\partial net^{(m,i)}} \frac{\partial net^{(m,i)}}{\partial w^{(m,i)}},$$

где последние два множителя определяются легко:

$$\frac{\partial y^{(m,i)}}{\partial net^{(m,i)}} = f'(net^{(m,i)}), \frac{\partial net^{(m,i)}}{\partial w^{(m,i)}} = y^{(m-1)},$$

где $y^{(m-1)}$ — вектор выходов нейронов $(m-1)$-го слоя. Нахождение оставшейся части опирается на рекуррентную процедуру:

$$s^{(m,i)} = \frac{\partial E_i(w)}{\partial y^{(m,i)}} = \sum_{j=1}^{N_{m+1}} \frac{\partial E}{\partial y^{(m+1,j)}} \frac{\partial y^{(m+1,j)}}{\partial y^{(m,i)}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{N_{m+1}} s^{(m+1,j)} f'(net^{(m+1,j)}) w_i^{(m+1,j)},$$

где $f'(net^{(m+1,j)})$ — прозводная функции активации по своему аргументу, $w_i^{(m+1,j)}$ — вес j-го нейрона $(m+1)$-го слоя, ведущий от i-го нейрона m-го слоя. Если выбрана сигмоидная логистическая функция активации, то $f'(net) = f(net)(1 - f(net))$. Начальное условие определяется по формуле

$$s^{(M)} = \frac{\partial E(w)}{\partial y^{(M)}} = y - \tilde{y}.$$

Ошибка работы сети $\varepsilon = y - \tilde{y}$ словно распространяется в направлении, обратном функционированию сети. Это обстоятельство и явилось причиной такого названия метода для нахождения градиента.

Простейшим методом оптимизации является градиентный метод:

$$w_+ = w_c - \eta \nabla_w J(w_c),$$

где w_c и w_+ — значения вектора весов на текущей и следующей итерациях соответственно, η — длина шага вдоль направления антиградиента. На практике обучение НС производится с помощью более эффективных методов, основанных на знании градиента — методах Флэтчера-Ривса, Полака-Рибьера, DFP, BFGS и т.д. Следует заметить, что данные методы применяются для оптимизации произвольных нелинейных функций. К сожалению, они не полностью используют специфику задач обучения НС прямого распространения.

Квадратичность минимизируемого функционала, суперпозиционный характер, а также *линейно-нелинейная по весам* структура сети позволяют конструировать специальные методы обучения НС. Метод Голуба-Перейры позволяет учесть все эти особенности [47]. Опишем суть метода для случая двухслойных одновыходных НС при отсутствующей функции активации в последнем слое (именно такие сети являются центром внимания в теореме Фунахаши) [7, 31].

Вектор весов сети w разделяется на две части — линейно входящий вектор $u \in \mathbb{R}^q$, состоящий из весов нейрона выходного слоя $w_i, i = \overline{1,q}$, и вектор нелинейно входящих весов $v \in \mathbb{R}^p$, составленный из весов нейронов скрытого слоя $w_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,q}$. Справедливо следующее предложение.

Предложение 2.6. Пусть (u^*, v^*) — веса, минимизирующие ошибку работы сети, и $F(v)$ — матрица выходов нейронов скрытого слоя, построенная на обучающем множестве. Тогда

$$u^* = F(v^*)^+ \tilde{y},$$

где $\tilde{y}$ — вектор, составленный из указаний учителя в обучающем множестве, $F(v^*)^+$ — псевдообратная матрица. При этом задача минимизации функционала

$$J(w) = \|F(v)u - \tilde{y}\|^2$$

эквивалентна минимизации функционала

$$J_{gp}(v) = \|F(v)F(v^*)^+ \tilde{y} - \tilde{y}\|^2,$$

где $\|\cdot\|$ — символ евклидовой нормы. □

Функционал J_{gp} зависит лишь от части нелинейно входящих весов НС, что позволяет уменьшить пространство оптимизируемых весов. Могут быть получены различные алгоритмические реализации метода Голуба-Перейры [31]. При выводе таких алгоритмов обучения наибольшая трудность состоит в нахождении матрицы Якоби функции

$$H(v) = F(v)F(v)^{+}\tilde{y} - \tilde{y} = \left(F(v)F(v)^{+} - I\right)\tilde{y}$$

по вектору v. Например, алгоритм Гаусса-Ньютона-Голуба-Перейры с псевдообращением будет выглядеть следующим образом:

$$v_{+} = v_c + Q^{+}(v_c)P(v_c)\tilde{y},$$

где

$$Q(v_c) = P(v_c)(F(v_c)')(I_p \otimes F^{+}(v_c)\tilde{y}) + (F^{+}(v_c))^{T}(F^{T}(v_c))'(I_p \otimes P(v_c)\tilde{y}),$$

$$P(v_c) = I_k - F(v_c)F^{+}(v_c).$$

Здесь k — объем обучающего множества, I_k — единичная матрица порядка k, $\otimes$ — символ тензорного произведения матриц, $F(v_c)'$ — блочная матрица, каждый элемент (блок) которой представляют собой производную матрицы $F(v_c)$ по элементу вектора v. Следует заметить, что $(F(v_c)')^{T} \neq \left(F(v_c)^{T}\right)'$. Блоки матрицы $F(v_c)'$ могут быть эффективно найдены аналогично процедуре ОРО. Данный метод можно распространить на случай многослойных и многовыходных сетей [31].

НС находят большое приложение в решении многих практических задач, связанных с прогнозированием, классификацией и кластеризацией, управлением техническими, экономическими и социальными системами [13]. Главной причиной их широкого применения является их возможность приобретать знания на основе реальных данных, т.е. их обучаемость. Эта особенность НС активно используется в других областях математики и, в первую очередь, в синтезе с нечеткой логикой.

Комбинирование нечеткой логики и НС может осуществляться тремя основными способами [50]:

1. Введением в НС возможности работать не с обычными, а с нечеткими числами (нечеткие нейронные сети);
2. Использованием НС для представления нечетких правил (выводов);
3. Введением в нечеткие системы нейроподобного способа настройки параметров (нейро-нечеткие системы).

2.4.2. Нечеткие нейронные сети

Нечеткие НС расширяют область применения нейронных сетей, т.к. позволяют оперировать нечеткими данными [36–38, 44]. Входные и выходные сигналы, а также веса таких сетей представляют собой нечеткие числа; арифметические действия, а также функции активации могут определяться одним из двух способов: на основе принципа расширения Заде и на основе интервальной арифметики.

Рассмотрим сети, в которых операции над нечеткими числами определяются по принципу расширения Заде [3]. Будем считать, что нечеткие числа имеют треугольный вид, т.е. число A представляется в виде тройки элементов $A = (m, \alpha, \beta)$, где m — центр (мода) числа, $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$ — соответственно левая и правая границы. Необходимо определить 3 операции: сложение, умножение двух чисел и применение функции активации. Сумма и произведение треугольных чисел определены ранее. Аналогично произведению определяется приближенное расширение функции активации. Если $f(x) = 1/(1+e^{-x})$, то $\hat{f}(A) = (f(m), f(m) - f(l), f(r) - f(m))$.

Бакли (Buckley) и Хайаши (Hayashi) показали, что нечеткие НС являются реализуют монотонные отображения [37, 38].

Определение 2.7. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — обычная (четкая) функция, а $\hat{f}(A_1, \ldots, A_n)$ — ее расширение на операции с нечеткими числами. Если из $A'_i \subset A_i$, $i = \overline{1, n}$ следует, что $\hat{f}(A'_1, \ldots, A'_n) \subset \hat{f}(A_1, \ldots, A_n)$, такая нечеткая функция называется *монотонной*.

Данное свойство можно интрепретировать следующим образом: чем больше неопределенность входных сигналов, тем больше неопределенность выходных. Любая нечеткая функция, полученная по принципу расширения, является монотонной. Следовательно, нечеткие нейронные сети, операции в которых основаны на принципе расширения Заде, являются монотонными.

Определение 2.8. Нечеткая фукнция $\hat{f}$, отображающая треугольные числа, называется *непрерывной*, если непрерывны в обычном смысле все функции f_m, f_α и f_β, определяющие значения m, α и β.

Алгоритмы обучения нечетких НС включают два момента: настройку центров треугольных чисел (весов) и подстройку значений границ. Обучение центров производится с помощью тех же методов оптимизации, которые применяются при обучении обычных НС. Алгоритм модификации значений границ весов весьма громоздок и сложен, поэтому в данной монографии не приводится. Для более подробной информации следует обратиться к [36].

Аналогично теореме Фунахаши для НС, существует теорема, доказанная Бакли, для нечетких нейронных сетей. Оказывается, что нечеткие сети являются универсальными аппроксиматорами только нечетких непрерывных монотонных функций [37]. Если функция не является монотонной, то необходимо отказываться от принципа расширения и использовать другие способы определения нечетких функций на основе интервальной арифметики [36, 38].

Более точно, нечеткие нейронные сети, работающие с нечеткими числами по этому принципу, способны аппроксимировать лишь функции с следующим ограничением: все входные и выходные значения должны представлять только неположительные или только неотрицательные значения. Другими словами, носители нечетких чисел должны содержать только неположительные вещественные числа или только неотрицательные. Для таких сетей обучение на основе метода обратного распространения ошибки не может быть использован. В работе [38] для обучения предлагается применять генетические алгоритмы.

2.4.3. Нейронные сети для представления правил вывода

Данный способ синтеза применяется в тех случаях, когда имеется нечеткая система, выраженная набором правил, известны функции принадлежностей в предпосылках и заключениях правил, но невозможно выбрать механизм логического вывода. В этом случае может быть использован подход, основанный на применении НС для реализации неизвестного отображения между предпосылками и заключениями [44].

Рассмотрим случай, когда система состоит из правил вида

$$R_i\text{: если } x \text{ есть } A_i, \text{ то } y \text{ есть } B_i,\ i = \overline{1, m},$$

где A_i и B_i — некоторые нечеткие числа. Обучающее множество для данной системы представляется в виде пар $\{A_i, B_i\}, i = \overline{1, k}$. Выделяют два основных подхода к преобразованию обучающего множества для возможности использования традиционных алгоритмов обучения НС.

Умано (Umano) и Езава (Ezawa) предложили способ, состоящий в представлении нечеткого множества в виде конечного дискретного множества значений функций принадлежности. Для этого выделяется носитель $[a_1, a_2]$, содержащий носители всех множеств $A_i, i = \overline{1, m}$ и носитель всех возможных входов A'. Аналогично выделяется носитель $[b_1, b_2]$ для выходов. Носители $[a_1, a_2]$ и $[b_1, b_2]$ дискретизируют на $p_x \geqslant 2$ и $p_y \geqslant 2$ частей соответственно:

$$x_i = a_1 + \frac{(i-1)(a_2 - a_1)}{k_x - 1}, \quad i = \overline{1, p_x};$$

$$y_j = b_1 + \frac{(j-1)(b_2 - b_1)}{k_y - 1}, \quad j = \overline{1, p_y}.$$

Пример рассмотренного способа синтеза приведен на рис. 2.30.

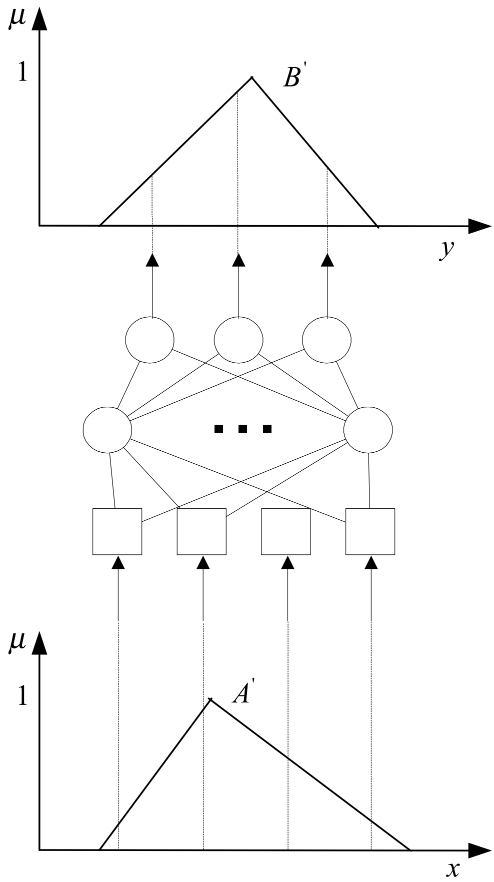


Рис. 2.30. НС для представления правила вывода

На основе данного разбиения дискретная версия обучающего множества примет вид: $\{(A_i(x_1), \ldots, A_i(x_{p_x})), (B_i(y_1), \ldots, B_i(y_{p_y}))\}, i = \overline{1,k}$. Таким образом, НС для представления механизма вывода будет состоять из p_x входов и p_y выходов.

Способ Уехара (Uehara) и Фуджисе (Fujice) заключается в использовании конечного числа α-сечений для представления нечетких чисел. В связи с тем, что нечеткие числа представляют собой выпуклые нечеткие множества, α-сечение можно описать парой чисел a_i^L и a_i^R — левой и правой границами.

Вначале формируется конечное множество разбиений

$$\alpha_j = \frac{j-1}{p-1}, j = \overline{1,p},$$

где $p \geqslant 2$ — количество разбиений. Для каждого отсечения α_j определяются границы отсечений для нечетких множеств A_i и B_i: $[a_{ij}^L, a_{ij}^R]$ и $[b_{ij}^L, b_{ij}^R]$. Далее строится дискретное обучающее множество

$$\{[a_{i1}^L, a_{i1}^R, \ldots, a_{ip}^L, a_{ip}^R]), [b_{i1}^L, b_{i1}^R, \ldots, b_{ip}^L, b_{ip}^R])\}.$$

К недостатку данного способа синтеза относится неинтерпретируемость логического вывода, характерная для обычных нечетких систем. Кроме того, для повышения точности представления знаний носители требуется разбивать на большое количество частей, что приводит к росту размерности НС, реализующей выводы.

2.4.4. Гибридные нейро-нечеткие системы

Гибридные нейро-нечеткие системы (далее просто гибридные системы) нашли гораздо большую область применения, чем все остальные методы синтеза нечетких множеств и нейронных сетей [17, 18, 44, 50]. Связано это с тем, что именно они позволяют наиболее полно использовать сильные стороны нечетких систем и НС. Характерной чертой гибридных систем является то, что они всегда могут быть рассмотрены как системы нечетких правил, при этом настройка функций принадлежностей в предпосылках и заключениях правил на основе обучающего множества производится с помощью НС. Существует несколько архитектур гибридных систем, каждая из которых предназначена для решения своего круга задач. Это накладывает определенные сложности в изучении и применении данных систем.

Рассмотрим типичный способ конструирования гибридных архитектур на примере систем, функционально эквивалентных системам Суджено.

Для простоты изложения предположим, что система имеет только две входные переменные и два правила:

R_1: если x_1 есть A_{11} и x_2 есть A_{12}, то $y = c_{11}x_1 + c_{12}x_2$,
R_2: если x_1 есть A_{21} и x_2 есть A_{22}, то $y = c_{21}x_1 + c_{22}x_2$.

Выход системы находится по формуле

$$y = \frac{\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2}{\alpha_1 + \alpha_2} = \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2,$$

где y_i — выход i-го правила. Данная система может быть реализована в виде нейроподобной структуры, состоящей из пяти слоев (рис. 2.31), называемой адаптивной нейро-нечеткой системой вывода (Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System, ANFIS) [17, 44]:

- *Слой 1.* Выходы нейронов этого слоя представляют собой степени принадлежностей входных значений нечетким множествам, ассоциированным с нейронами. Обычно применяются гауссовские функции принадлежности:

  $$A_{ij}(x) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - a_{ij}}{b_{ij}}\right)^2\right],$$

  где a_{ij} — множество параметров, требующих настройки в процессе обучения. Также могут быть использована произвольная непрерывная функция, например, трапециевидной или треугольной формы. Данные параметры называются *предпосылочными*.

- *Слой 2.* Каждый нейрон этого слоя вычисляет уровень истинности правила по формуле $\alpha_i = A_{i1}(x_1) \wedge A_{i2}(y_0), i = 1, 2$, где для моделирования связки «и» может использоваться дифференцируемая t-норма. Нейрон этого слоя называются *нейронами правил.*

- *Слой 3.* На данном слое производится нормализация уровней истинности каждого правила по формулам $\beta_i = \alpha_i/(\alpha_1 + \alpha_2)$.

- *Слой 4.* Выходы нейронов представляют произведение нормализованных значений уровней истинности на соответствующие выходы правил: $y_i = \beta_i(c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2)$.

- *Слой 5.* Нейрон последнего (выходного) слоя производит адаптивное суммирование выходов нейронов предыдущего слоя.

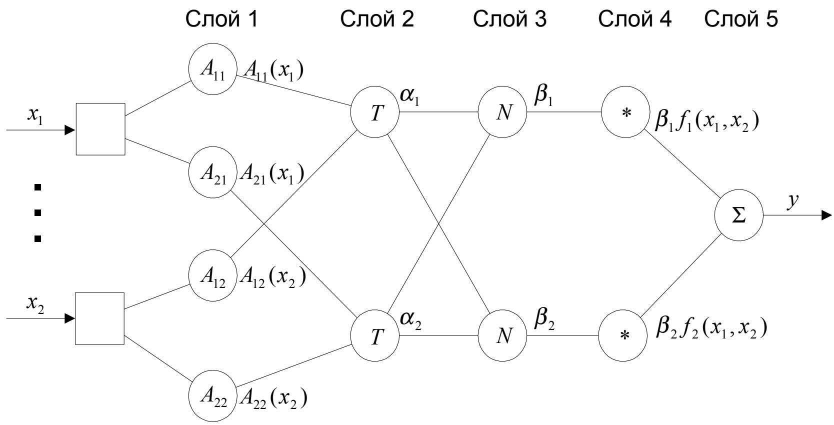


Рис. 2.31. Адаптивная нейро-нечеткая система вывода (ANFIS)

К сожалению, наличие множества различных реализаций приводит к тому, что процедура ОРО не может быть непосредственно использована в обучении гибридных систем. Тем не менее, параметры гибридной системы могут быть найдены на основании обучающего множества $\{x_i, y_i\}, i = \overline{1, k}$, с помощью методов градиентной оптимизации. Нахождение градиента функционала качества работы системы должно определяться для каждой отдельной архитектуры, при этом следует принимать во внимание суперпозиционный характер преставления гибридных нейро-нечетких систем. Дополнительным является требование дифференцируемости отображений, реализуемых системой. Это, в свою очередь, отражается в необходимости выбора дифференцируемых функций принадлежностей, t-норм, t-конорм и операции агрегации.

Приведем способ настройки параметров функций принадлежностей для архитектуры ANFIS. Требуется определить значения переменных $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, i, j = 1, 2$, минимизирующих ошибку

$$J = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{k} e_i^2 = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{k} (y^l - \tilde{y}^l)^2,$$

где $y^l = y(\tilde{x}^l)$ — выход гибридной системы при входе из обучающего множества $\{\tilde{x}^l, \tilde{y}^l\}, l = \overline{1, k}$ (множитель $1/2$ введен для удобства, он не влияет на оптимум функционала). Будем считать, что в качестве оператора «и» и импликации используется произведение. Алгоритм нахождения градиента, учитывающий суперпозиционную структуру нейро-нечеткой системы, состоит из нескольких этапов:

1. Вычисление частных производных функционала по параметрам выходного слоя:
$$\frac{\partial J}{\partial c_{ij}} = \left[\sum_{l=1}^{k}(y^l - \tilde{y}^l)\right]\beta_i x_j, i, j = 1, 2;$$

2. Нахождение промежуточных производных:
$$\frac{\partial J}{\partial \beta_i} = \left[\sum_{l=1}^{k}(y^l - \tilde{y}^l)\right](c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2),$$
$$\frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_i} = \frac{\alpha_i}{(\alpha_1 + \alpha_2)^2},$$
$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial A_{i1}} = A_{i2},$$
$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial A_{i2}} = A_{i1};$$

3. Вычисление производных по параметрам предпосылок:
$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial a_{ij}} = A_{ij}\frac{x_i - a_{ij}}{b_{ij}^2},$$
$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial b_{ij}} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial a_{ij}}\frac{x_i - a_{ij}}{b_{ij}},$$
на основе производной сложной функции искомые значения вычисляются по формулам
$$\frac{\partial J}{\partial a_{ij}} = \frac{\partial J}{\partial \beta_i}\frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_i}\frac{\partial \alpha_i}{\partial A_{ij}}\frac{\partial A_{ij}}{\partial a_{ij}},$$
$$\frac{\partial J}{\partial b_{ij}} = \frac{\partial J}{\partial \beta_i}\frac{\partial \beta_i}{\partial \alpha_i}\frac{\partial \alpha_i}{\partial A_{ij}}\frac{\partial A_{ij}}{\partial b_{ij}}.$$

Для гибридных сетей другой структуры вывод алгоритма настройки параметров функций принадлежности производится аналогично.

Заметим, что структура ANFIS также обладает линейно-нелинейной по параметрам структурой. Действительно, параметры a_{ij} и b_{ij} в общем случае входят нелинейно (например, в случае гауссовской и сигмоидной функций), параметры же c_{ij} — нелинейно. Следовательно, для настройки параметров может быть применен метод Голуба-Перейры, позволяющий настраивать параметры в предпосылках правил, линейно входящие в заключения параметры далее определяются автоматически.

Заключение

Развитие нечеткой алгебры прошло несколько этапов. Зарождение основных понятий нечеткой логики относится к периоду 60-х годов и знаменуется первыми работами Лотфи Али Заде, в которых описывается подход, представляющий собой отказ от общепринятых количественных методов анализа систем. В его работах были введены широко используемые в настоящее время понятия лингвистической переменной, нечеткого высказывания, нечеткого алгоритма. Дальнейшее развитие происходило по двум основным взаимозависимым направлениям: совершенствование теоретического аппарата и появление практических приложений. Нечеткий подход стал применяться в традиционных разделах математики: математическом анализе, алгебре и теории чисел, что привело к появлению нечеткого реляционного исчисления, нечеткой арифметики и т.д. Среди практических приложений можно отметить задачи искусственного интеллекта, принятие решений, инженерию знаний, нечеткое управление, нечеткий анализ данных, нечеткое моделирование, нечеткую теорию игр.

В указанных областях используется математический аппарат, способный корректно описывать осмысленные процессы, протекающие в живых системах, воспроизводить при помощи компьютеров их мыслительную деятельность, описывать экспертные знания и процедуры их обработки. В качестве соответствующих математических методов успешно зарекомендовали себя методы нечеткой алгебры.

В монографии были рассмотрены вопросы, касающиеся как теоретического, так и прикладного характера нечеткой алгебры. Расширена традиционная булева алгебра при помощи нечетких операций инвертора, t-нормы, t-конормы; на их основе определены операции над нечеткими множествами и отношениями. Отличие рассмотренных операций от их частных (максминных) аналогов потребовало пересмотреть основные свойства нечетких множеств и выделить только те из них, которые справедливы для расширенных операций. С позиций выбранного подхода определены понятия нечетких чисел, нечетких и лингвистических переменных, лежащих в основе нечетких (мягких) вычислений, применяющихся в человеко-машинных системах обработки информации.

Из многочисленных и бурно развивающихся приложений нечеткой алгебры в монографии рассмотрены четыре актуальных направления: нечеткие реляционные уравнения, модели и методы принятия решений, системы нечеткого вывода, гибридные нейро-нечеткие системы. Каждое из них имеет ряд нерешенных проблем и перспективных для дальнейшего развития задач. Для формализации проблемной ситуации посредством нечетких реляционных уравнений особое значение имеет проблема выбора типа используемой композиции. Выбор обуславливается спецификой решаемой задачи, он должен быть теоретически обоснован, практически апробирован и протестирован на контрольных выборках. Для развития теории нечетких реляционных уравнений актуален поиск методов решения уравнений с типами композиций, отличными от рассмотренных.

Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности оперируют количественной нечеткой информацией, однако экспертам гораздо понятнее и доступнее естественный язык, оперирующий качественными, вербальными категориями. Поэтому для данного приложения существенна проблема корректной интерпретации качественной информации посредством оценок количественных шкал. Кроме того, существуют разнообразные методы принятия решений, предоставляющие, как правило, различное упорядочивание рассматриваемых альтернатив даже на основе одних и тех же экспертных оценок. Поэтому перед лицом, принимающим решение, возникает недостаточно исследованная проблема обоснованного выбора того или иного метода.

Эффективное использование нечетких систем сталкивается с проблемой выбора адекватного для решения конкретной задачи механизма логического вывода и типов агрегации выходных значений логических правил. Оптимальный выбор и упрощение совокупности правил вывода и их структуры также является важной, но малоизученной задачей. Определение видов функций принадлежности, используемых в предпосылках и заключениях правил, может быть произведено путем синтеза нечетких систем с нейросетевыми структурами. Наиболее значимыми из них являются гибридные нейро-нечеткие системы, для которых пока не существует общего метода описания структуры, а также единого способа обучения для различных архитектур. Другая задача состоит в поиске новых приложений аппарата нечетких нейронных сетей.

Современное состояние теории и приложений нечеткой логики, отраженное в последних отечественных и зарубежных публикациях, свидетельствует о несомненной перспективности этого направления искусственного интеллекта. Особое значение приобретает интеграция нечеткой логики с другими областями знаний.

Предметный указатель

Библиографический список

1. Аведьян Э.Д. Алгоритмы настройки многослойных нейронных сетей //Автоматика и телемеханика. — 1995. — №4. — С. 106-118.

2. Алтунин А.Е., Семухин М.В. Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: Монография. — Тюмень: ТГУ, 2000. — 352 с.

3. Асаи К. и др. Прикладные нечеткие системы: Пер. с японского /Под ред. Т. Тэрано, К. Асаи, М. Сугэно. — М.: Мир, 1993. — 368 с.

4. Белкин А.Р., Левин М.Ш. Принятие решений: комбинаторные модели аппроксимации информации. — М.: Наука, 1990. — 160 с.

5. Белоусов А.И., Ткачев С.Б. Дискретная математика: Учеб. для вузов /Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2000. — 744 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XIX).

6. Блюмин С.Л. Нечеткая алгебра как сочетание числовой и булевой алгебр //Новые технологии в образовании: Труды III Междунар. электронной науч. конф. — Воронеж: Воронежский государственный педагогический университет, 2000. — С. 46-47.

7. Блюмин С.Л., Сараев П.В. Алгоритм Голуба-Перейры в обучении искусственных нейронных сетей // Нейроинформатика и ее приложения: Материалы VIII Всероссийского семинара. — Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2000. — С. 18-19.

8. Блюмин С.Л., Шуйкова И.А. Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности. — Липецк: ЛЭГИ, 2000. — 139 с.

9. Борисов А.Н., Вилюмс Э.Р., Сукур Л.Я. Диалоговые системы принятия решений на базе мини-ЭВМ: Информационное, математическое и программное обеспечение. — Рига: Зинатне, 1986. — 195 с.

10. Борисов А.Н., Крумберг О.А., Федоров И.П. Принятие решений на основе нечетких моделей. Примеры моделей. — Рига: Зинатне, 1990. — 184 с.

11. Глова В.И., Аникин И.В., Аджели М.А. Мягкие вычисления (soft computing) и их приложения: Учебное пособие /Под ред. В.И. Глова. — Казань: Изд-во Казан.гос.техн.ун-та, 2000. — 98 с.

12. Горбань А.Н., Россиев Д.А. Нейронные сети на персональном компьютере. — Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма РАН, 1996. — 276 с.

13. Ежов А., Шумский С. Нейрокомпьютинг и его применение в экономике и бизнесе, 1998 г. http://canopus.lpi.msk.su/neurolab/papers/nnbusapp/index.html.

14. Заде Л. Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений: Пер. с англ. // Математика сегодня: Сборник статей. — М.: Знание. — 1974.

15. Ириков В.А., Тренев В.Н. Распределенные системы принятия решений. Теория и приложения. — М.: Наука. Физматлит, 1999. — 288 с.

16. Кофман А. Хил Алуха Х. Введение теории нечетких множеств в управлении предприятиями: Пер. с исп. — Минск: Высш. шк., 1992. — 224 с.

17. Круглов В.В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика. /В.В. Круглов, В.В. Борисов. — М.: Горячая линия — Телеком, 2001. — 382 с.

18. Круглов В.В. Нечеткая логика и искусственные нейронные сети /В.В. Круглов, М.И. Дли, Р.Ю. Голунов — М.: Физматлит, 2001. — 224 с.

19. Кудинов Ю.И., Венков А.Г., Келина А.Ю. Моделирование технологических и экологических процессов. — Липецк: ЛЭГИ, 2001. — 131 с.

20. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных Странах: Учебник. — М.: Логос, 2000. — 296 с.

21. Мелихов А.Н., Баронец В.Д. Проектирование микропроцессорных средств обработки нечеткой информации. — Ростов н/Д.: Изд. Ростовского ун., 1990. — 128 с.

22. Мелихов А.Н., Бернштейн Л.С., Коровин С.Я. Ситуационные советующие системы с нечеткой логикой. — М.: Наука, Гл.ред. физ.мат. лит., 1990. — 272 с.

23. Методы нейроинформатики / Под. ред. А.Н. Горбаня; Отв. за выпуск Доррер М.Г. — Красноярск: КГТУ, 1998. — 205 с.

24. Нейроинформатика / А.Н. Горбань, В.Л. Дунин-Барковский, А.Н. Кирдин и др. — Новосибирск: Наука. Сибирское предприятие РАН, 1998. — 296 с.

25. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / Под ред. Д.А. Поспелова. — М.: Наука, 1986. — 311 с.

26. Общая алгебра. Т.1/ О.В. Мельников, В.Н. Ремесленников, В.А. Романьков и др.; Под общ.ред. Л.А. Скорнякова. — М.: Наука. Гл.ред. физ.-мат. лит., 1990. — 592 с.

27. Орлов А.И. // Анализ нечисловых данных в системных исследованиях: Сборник трудов. — Вып. 10. — М.: ВНИИСИ, 1982. — С. 4-12.

28. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. — М.: Наука. — 1981. — 194 с.

29. Пивкин В.Я., Бакулин Е.П., Кореньков Д.И. Нечеткие множества в системах управления / Под ред. Ю.Н. Золотухина. http://eportal.da.ru/fuzzy/content.html.

30. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М.: Радио и связь, 1993. — 320 с.

31. Сараев П.В. Использование псевдообращения в задачах обучения искусственных нейронных сетей //Исследовано в России: Эл. жур. — 2001. — 29. — С. 308-317. http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2001/029.pdf

32. Трахтенгерц Э.А. Компьютерная поддержка принятия решений: Научно-практическое издание. Сер. Информатизация России на пороге XXI века. — М: СИНТЕГ, 1998. — 376 с.

33. Цыгичко В.Н. Руководителю — о принятии решений. — М.: ИНФРА-М, 1996. — 272 с.

34. Черпаков И.В., Шуйкова И.А. Логические операции нечеткой алгебры как расширения булевых операций //Новые технологии в образовании: Труды III Междунар. электронной науч. конф. — Воронеж: Воронежский государственный педагогический университет, 2000. — С. 63.

35. Шапиро Д.И. Принятие решений в системах организационного управления. Использование расплывчатых категорий. — М.: Энергоатомздат, 1983. — 185 с.

36. Buckley J.J., Feuring T. Universal approximators for fuzzy functions. — Fuzzy Sets and Systems, 2000. — №113. — P. 411-415.

37. Buckley J.J., Hayashi Y. Can fuzzy neural nets approximate continous fuzzy functions? — Fuzzy Sets and Systems, 1994. — №61. — P. 43-51.

38. Buckley J.J., Hayashi Y. Can neural nets be universal approximators for fuzzy functions? — Fuzzy Sets and Systems, 1999. — №10. —P. 323-330.

39. De Baets B. Analitic Solution Methods for Fuzzy Relational Equations // Fundamentals of Fuzzy Sets: Handbooks of Fuzzy Sets Series. — Dordrecht: Kluwer, 2000. — Vol. 1. — Ch. 6. — 50 p.

40. De Baets B. Idempotent Uninorms // European Journal of Operational Research. — 1999. — №118. — P. 631–642.

41. Di Nola A., Pedrycz W., Sessa S. Fuzzy Relational Equations Theory As a Basis of Fuzzy Modeling: an Overview // Fuzzy Sets And Systems. — 1991. — №40. — P. 415-429.

42. Di Nola A., Pedrycz W., Sessa S. Fuzzy Relational Structures: the State-of-Art // Fuzzy Sets And Systems. — 1995. — №75. — P. 241-262.

43. Fu Cheng Tang. Pertubation Techniques For Fuzzy Matrix Equations // Fuzzy Sets And Systems. — 2000. — №109. — P. 363-369.

44. Fullér R. Neural Fuzzy Systems. — http://www.abo.fi/~rfuller/robert.html.

45. Fullér R. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic — http://www.abo.fi/~rfuller/robert.html.

46. Fullér R. Fuzzy relations — http://www.abo.fi/~rfuller/robert.html.

47. Golub G.H., Pereyra V. The Differentiation of Pseudo-Inverses and Nonlinear Least Squares Problems Whose Variables Separate // SIAM J. Num. Anal., 1973. — V. 10. — P. 413-432.

48. Loetamonphong J., Shu-Cherng Fang. Optimization of Fuzzy Relation Equations With Max-Product Composition // Fuzzy Sets And Systems.— 2001. — №118. — P. 509-517.

49. Mary M. Bourke, D. Grant Fisher. Solution Algorithms for Fuzzy Relation Equations With Max-Product Composition // Fuzzy Sets And Systems. — 1998. — №94. — P. 61-69.

50. Nauck D. Neuro-fuzzy systems: review and prospects. — fuzzy.cs.uni-magdeburg.de/ nauck.

51. Pedrycz W. Processing In Relational structures: Fuzzy Relational Equations // Fuzzy Sets And Systems. — 1991. — №40. — P. 77-106.

52. Pedrycz W. Processing In Relational structures: Fuzzy Relational Equations // Fuzzy Sets And Systems. — 1991. — №40. — P. 77-106.

53. Plavica V., Petrovacki D. About simple fuzy control and fuzzy control based on fuzzy relational equations // Fuzzy Sets And Systems. — 1999. — №101. — P. 41-47.

54. Sanches E.. Resolution of CompositeFuzzy Relation Equations // Inform And Control. — 1976. — №30. — P. 38-48.

55. Sessa S. Some results in the setting of Fuzzy Relational Equations theory // Fuzzy Sets And Systems. — 1984. — №14. — P. 281-297.

56. Stamou G. B., Tzafestas S. G. Resolution of composite fuzzy relation equations based on Archimedean triangular norms // Fuzzy Sets And Systems. — 2001. — №120. — P. 395-407.

57. Xue-ping Wang. Method of Solution to Fuzzy Relation Equations in A Complete Brouwerian Lattice // Fuzzy Sets And Systems. — 2001. — №120. — P. 409-414.

58. Zhao C.-K. On Matrix Equations In A Class of Complete And Completely Distributive Lattices // Fuzzy Sets And Systems. — 1987. — №22. — P. 303-320.

59. Zhou-Tian Fan. A Note On the Power Sequence of a Fuzzy Matrix // Fuzzy Sets And Systems. — 1999. — №102. — P. 281-286.

Оглавление