Дискретка

Зайцев Вадим

2010-02-12

1 Комбинаторика

1.0.1 Правило произведенеия

Если элемент $a \in A$ мы можем выбрать n способами и после каждого такого выбора элемент из $b \in B$ можем выбрать m способами, то пары ab мы можем выбрать $n \cdot m$ способами. $|X_1 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \times \ldots \times |X_n|$.
В n-мерном векторном про-ве над $GF(p)$ есть p^n элементов. (Двоичных векторов длины n будет 2^n штук).

1.0.2 Опр

Выборка семейстава элементовв $a_{i_1}, \ldots, a_{j_k}$ из $A = \{a_1, , ...a_n\}$ назовем выборкой объема K из n элементов.

1. **Упорядоченная выборка объема K из n элементов без повторений**.
   (n, k) - перестановка, $A(n, k)$ - число таких выборок.

   Лемма 1: $A(n, k) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1) = [n]_k$.

   Док-во: очевидно :).

   $\forall x \in \mathbb{R}: \quad [x]_k = x \cdot (x-1) \cdot \ldots \cdot (x-k)$. $\quad k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$ т.к. мы должны иметь целое кол-во скобок, равное k.
   $[x]_0 = 1, \quad [n]_n = n!$.

   Пример: $(3, 2)$-перестановки: ab, ac, ba, bc, ca, cb.

2. **Упорядоченная выборка объема K из n элементов с повторениями**. $\widehat{A}(n, k)$

   Лемма 2: $\widehat{A}(n, k) = n^k$. Док-во очевидно.

   Пример: $\widehat{A}(3, 2) = 9$. В отличие от предыдущего, могут быть повторения: aa, bb, cc.

3. **Неупорядоченные выборки объема K из n элементов без повторений**. (n, k) - сочетания. Обозн. (n, k).
   $(3, 2)$-сочетания: $ab, ac, bc. C(3, 2) = 3$.
   $C(n, k) = \dfrac{[n]_k}{k!} = \dbinom{n}{k} = C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}, \quad x$ может быть из $\mathbb{R}$.

   Док-во: $(n, k) = \dfrac{A(n, k)}{k!} = \dfrac{[n]_k}{k!}$. ч.т.д.

   $\dbinom{n}{k} = 0,$ при $k > n$

   Пример: Число двоичных векторов длины n с k единицами равно числу k-элементных подмножеств n-элементного мно-ва и равно $\binom{n}{k}$. $((x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$, $\{0, 1\}^n$ - число двоичных картежей/наборов - как больше нравится).

4. **Неупорядоченные выборки объема k из n элементов с повторениями**. Обозначим $\widehat{C}(n, k)$
   $\widehat{C}(3, 2) = 6$ (предыдущие ab, ac, bc плюс повторения aa, bb, cc).

Лемма 4: $\widehat{C}(n,k) = \binom{n+k-1}{n-1}$

Док-во: Давайте построим биекцию с множеством, кол-во элементов которого мы можем посчитаь.
$r_1, \ldots, r_n$ - где r_i - число вхождений a_i в выборку.
$\sum r_i = k, \quad r_i \geq 0$
Рассмотрим двоичный картеж, у которого: $\underbrace{0\ldots0}_{r_1}1\underbrace{0\ldots0}_{r_2}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{r_n}$ - длина $n+k-1$, единиц $n-1$.
Получаем биекцию между неупорядоченными выборками по k из n элементов без повторений и двоичных картежей для $(n+k-1)$ с $(n-1)$ единицами.
Получаем $\binom{n+k-1}{n-1}$ ч.т.д.

1.1 Бином Ньютона

$\forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$
Следущие вещи верны $\forall n, k \in N, \quad k \leq n$

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. тождество Паскаля: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
3. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$
4. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$
5. **Лемма 6: (тождества Вандермонда):** $\forall n, m \mid k \leq n, \, k \leq m \quad \binom{n+m}{k} = \sum\limits_{s=0}^{n} \binom{m}{s} \cdot \binom{n}{k-s}$

   Док-во :

6. **Лемма 7:** $\forall n \in N \binom{2n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$

   Док-во: $\binom{2n}{n} = \binom{n+n}{n} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ ч.т.д.

Пример 5 ручек, 7 карандашей. Можем выбрать 1 предмет. 12 вариантов :)

1.1.1 Правило суммы

Если из A можно выбрать n способами, из B можно выбрать m способами. Из A или B можно выбрать $n+m$ способами.
$\forall$ разбиения мно-ва S на $S_1 \cup S_2 \cup S_2 \ldots \cup S_n, \quad \forall i \neq j \, S_i \cap S_j = \varnothing : \quad |S| = |S_1| + \ldots + |S_n|.$

Пример: тождество Паскаля (1.1.2).

Док-во: разобъем мно-во всех (n, k)-сочетаний на 2 мно-ва:

1. Елемент a попал в наше сочетание $\Rightarrow$ один уже есть, из осташвихся $n-1$ выбираем нужные $k-1$.

2. Елемент a не попал в сочетание.

$(1) + (2) = \text{всем сочетаниям} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

$|S_1 \cup ... \cup S_2|, \quad S_i <= S \leftarrow$ это интересная строчка, которую я так и не понял, к какому пункту лучше отнести ...[1].

1.1.2 Лемма 8:

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Док-во :

1.1.3 Лемма 9:

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup C| - |A \cup B| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|$.
Док-во картинкой:

1.1.4 Теорема 1: (формула включений-исключений)

Пусть A - конечное конечное мно-во, $A_1 \dots A_n \subseteq A$. Тогда $|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^{n} S_k$,

$S_k = \sum_{\{i_1 \dots i_k\} \subseteq \{1 \dots n\}} |A_i \cap \dots \cap A_k|$
$|S \setminus (A \cup B \cup C)| = S_0(|S|) - S_1(|A| + |B| + |C|) + S_2(|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C|) - S_3(|A \cap B \cap C|)$.

Доказательство. Первый способ: инудкция по n - д.з.

Доказательство. Второй способ: $x \in A$ - рассмотрим вклад x в левую и правую часть неравенства.

1. $x \in A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)$
   слева дает 1. справа только в S_0, т.е. 1 раз.

2. $x \in (A_1 \cup \dots \cup A_n)$
   слева дает 0. Пусть x встречается ровно в t множествах $A_{i_1} \dots A_{i_t}$, в S_0 он встретися 1 раз
   в S_1 он встретится t раз
   в $S_2 : \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le n} |A_{j_1} \cap A_{j_2}| = \binom{t}{2}$ раз
   в $S_3 : \binom{t}{3}$
   $\vdots$
   в $S_t : \binom{t}{t} = 1$ раз

   Всего справа он встречатеся $1 - t + \binom{t}{2} - \binom{t}{3} \dots + (-1)^t \binom{t}{t} = \sum_{j=0}^{t} (-1)^i \binom{t}{i} \overset{\text{по тождеству } 4}{=} 0$. ч.т.д.

1.1.5 Задача о беспорядках

$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ - перестановка $(1, \dots, n)$.
Нужно найти число перестановок из n эл-ов мно-ва, в которорых никакой эл-т не остался на мсте.

[1] наверное, всё-таки к нижнему ...

Доказательство. $(\forall i \quad \pi_i \neq i)$.
A - все перестановки. $\forall i \quad A_i \leftrightarrow \pi_i = i$.
$A \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ - искомое мно-во.
$|A| = n! \Rightarrow S_0 = n!$
$|A_i| = (n-1)!$
$$S_i = \sum_{i=1}^{n} |A_i| = n \cdot (n-1)!$$
$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$
$$S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (n-2)! = \binom{n}{2}(n-2)!$$
$|A_{i_1} \cap \ldots A_{i_k}| = (n-k)!$
$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} (n-k)! = \binom{n}{k}(n-k)!$$
$$|A \setminus (A_i \cup \ldots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!k!}(n-k)! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$ □