Лекции по дискретке

Зайцев Вадим

2010-03-19

1 Теория графов

1.1 Опеределения

1.1.1 Определение

V - непустое конечное мно-во.
$V^{(2)}$ - всех двухэлементные подмно-ва мно-ва V.

(V, E), $E \subseteq V^2$ - называется граф (обыкновенный граф, простой граф, etc).
V - вершнины, E - рёбра.
$G = (V, E) \quad VG$ - мно-во вершни, EG - мно-во рёбер.
$|VG|$ - порядок графа.
$|G| = |VG| = n \Rightarrow G$ - n-граф
$|G| = n, \quad |EG| = m, \quad G - (n, m)$ - граф.

1.1.2 Пример простого графа

— picture 1 —-

1.1.3 Ещё пара определений

мультграф - пара (V, E), где V - непустое конечное мно-во, E - семейство (могут повторяться элементы) элементов из $V^{(2)}$.
псевдограф - пара (V, E), где V - непустое конечное мно-во, E - семейство нупорядоченных пар элементов из V, не обязательно различных.

1.1.4 Пример графа с петялми

— picture 2 —-

1.1.5 Определения

Две вершины u и v **смежные**, если $\{u, v\} \in E$ и **не смежные** в противном случае.
Если $e = \{u, v\} \in E \Rightarrow$ ребро e соединяет u и v. $e = uv = vu$.
Два **ребра смежные**, если они имеют общий конец.
Ребро e и вершина v инцедентны, если v является концом e.

1.1.6 Адекватные примеры графов

1. K_n - полный граф из n вершин.
   $|VK_n| = n, \quad K_n = (V, V^{(2)})$
   — picture 3 —
   $|EK_n| = \binom{n}{2}$.

2. O_n - пустой граф на n вершинах.
   $O_n = \{V,$
   $varnothing\}$ (нулевой, вполне несвязный граф.

3. P_n - простая цепь на n вершни
   — picture 4 —

4. C_n - простой цикл на n вершин.
   — picture 5 —

5. Граф Петерсена
   — picture 6 —-

6. Q_n - n-мерный куб.
   VQ_n - мно-во всевозможных двоичных слов длины n. $VQ_n = \{0,1\}^n$
   EQ_n - две вершины смежные, если они различаются ровно одной позицией.
   — picture 7 —

1.1.7 o_O

$G = (V, E), \quad G' = (V', E')$.
G и G' изоморфны ($G \cong G'$), если $\exists$ биекция $\varphi : V \to V' : \quad uv \in E \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E'$.
φ - изоморфизм графов G и G'. Если $G = G'$, то φ - автоморфизм графа (V и V' совпадают).

1.1.8 Определение

Степень вершины v - число рёбер, инцедентных с вершиной v. $\deg_G(v) = \deg(v)$.
Окружение вершины v - это мно-во всех вершин, смежных с v. $N_G(v) = N(v)$.
Для обыкновенного графа $\deg(v) = |N(v)|$.
Если $\deg(v) = 0$, то v - **изолировнная**.
Если $\deg(v) = 1$, то v - **висячая**. А ребро, инцедентное висячей вершине, тоже **висячее**.

1.1.9 Лемма 1 (о рукопожатиях)

Пусть G - произвольный граф, тогда $\sum\limits_{v \in VG} \deg_G(v) = 2|EG|$.

Доказательство. К. О. □

1.1.10 Следствие 1

Любой граф содержит чётное число вершин нечётной степени.

1.1.11 Определение

Если в G, $\forall v \in VG \quad \deg(v) = K \Rightarrow G$ - k-регулярный граф.
Полный граф является $(n-1)$-регулярный, граф Петерсена является 3-регулярным графом, Q_n - n-регулярным.

1.2 Подграфы, операции над графами

Граф H называется подграфом графа G, если $VH \subseteq VG$, $EG \subseteq EG$.
— picutre 8 —(?)
Если $VH = VG$, то H - оставный подграф.

1.2.1 Определения подграфов

Пусть $U \subseteq VG \quad D = \{uv \mid u, v \in U, \quad uv \in EG\ \}$.
Тогда $G(U) = (U, D)$ - подграф, порождённый мно-вом вершин U.
Пусть $\subseteq EG, \quad U$ - мно-во концевых вершин рёбер из D.
Тогда $G(D) = (U, D)$ - подргаф, порождённый мно-вом рёбер D.

1.2.2 Определения операций

Пусть $v \in VG$, $G - v$ - граф, получающийся из G удалением вершинки v и всех рёбер, ей инцедентных. $e \in EG$, $G - e$ - удаление ребра. $V(G - e) = VG$, $E(G - e) = EG \setminus \{e\}$.
Если $uv \notin EG$, $u, v \in VG \quad G + uv = (VG, EGV\{uv\})$.
Граф H называется объединением графов G и F, если $VH = VG \cup VF$, $EH = EG \cup EF$, будем обозначать $H = G \cup F$.
Если $VG \cap VG \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad G \cup F$ - дизъюнктивное объедиение.

Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$.
Произведение $G = G_1 \times G_2$ называется $G = (V_1 \times V_2, E)$.
(v_1, v_2) смежные с $(u_1, u_2) \quad \Leftrightarrow \quad$ или $(v_1 = u_1, \quad v_2, u_2 \in E_2)$ или $(v_2 = u_2, \quad v_1, u_1 \in E_2)$.

1.2.3 Лемма 2

$Q_1 = K_1, \forall n \geq 2 \quad G_n = G_{n+1} \times K_1$

Доказательство. упражнение :($\square$

1.2.4 тра-ля-ля

Дополнение к графу $G = (V, E)$ есть $\overline{Q} = (V, \overline{E})$, где $\overline{E} = \{uv \mid uv \notin E, \quad u, v \in V\}$.
Соединение графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ и $V_1 \cap V_2 = \varnothing$ - граф $G_1 + G_2$ - дизъюнктное объединения G_1 и G_2 и добавлением ребёр $v_1 v_2 = v_2 \in V_1, v_2 \in V_2$.
Для графа $G = (V, E)$ рёберным графом называется $L(G), \quad VL(G) = EG$, $e_1 e_2 \in EL(G) \Leftrightarrow e_1$ и e_2 смежные в G.

через последовательность $v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots v_t, e_t, v_{t+1}, \quad \forall i \in \{1, \ldots t\}, e_k = v_i v_{i+1}$ называются маршрутом, соединяющим v_1 и v_t. (v_1, v_{t+1}) - маршрут. t - длина.
Маршрут называется цепным, если все его рёбра различны.
Если в цепи все вершины разные (кроме, возможно, конечной), то такая цепь назывется простой.
Маршрут назывется называется циклическим, если $v_1 = v_t$. Тогад циклическая цепь называется циклом, а циклическая простая цепь называется простым циклом.

1.2.5 Лемма 3

При $v \neq u$ всякий (u, v) маршрут содержит простую (u, v) цепь.

1.2.6 Лемма 4

Всякий цикл содержит простой цикл.

1.2.7 adf

v и u - связные в G, если $\exists (u, v)$ - простая цепь. G - связный, если $\forall u, v \in VG, \quad u, v$ - связные.
Отноешние связнаости в G - отношение эквивалентности.
$\forall$ кл. экваивалентности - подграф, порождённый веринами этого класса - компоненты связности.
Максимальный по включению вершин и рёбер связный подграф графа G назывется компонентной связности графа G.

1.2.8 Лемма 5

Любой граф является дизъюнктным объединением своих компонент связности.